

Teoria dos Jogos

Prof. Maurício Bugarin

Eco/UnB

EPRG-Economics and Politics Research Group

Jogos estáticos com informação completa

Parte 5

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Resposta 5: ENM

Proposição. Caracterização de Equilíbrios de Nash em estratégias mistas.

Seja $J = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo finito na forma normal. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

- (i) σ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.
- (ii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,
Se $\sigma_i(s_i) > 0$ então $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$
Se $\sigma_i(s_i) = 0$ então $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$
- (iii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,
 $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$

Observação. Em particular, para todos $s_i, s'_i \in S_i, \sigma$ ENM,

se $\sigma_i(s_i)\sigma_i(s'_i) > 0$ então $Eu_i(s_i, \sigma_{-i}) = Eu_i(s'_i, \sigma_{-i})$

Apresentação

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

Capítulo 2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal

2.1.2. Solução por Dominância

2.1.3. Equilíbrio de Nash

2.2. Aplicações

2.2.1. Oligopólio de Cournot

2.2.2. Duopólio de Bertrand

2.2.3. Negociação com arbitragem

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

2.3.3. Exercícios extras

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Definição: Seja $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo finito na forma normal com $|N| = n$.

A partir de $\mathcal{J}$, pode-se definir o jogo $\Delta\mathcal{J} = (N; \Delta S_i; Eu_i, i = 1, \dots, n)$, em que:

ΔS_i é o conjunto de todas as distribuições de probabilidades sobre o conjunto S_i

Portanto, uma estratégia mista do jogo $\mathcal{J}$ nada mais é que uma estratégia pura do jogo $\Delta\mathcal{J}$.

Equilíbrio de Nash para estratégias mistas:

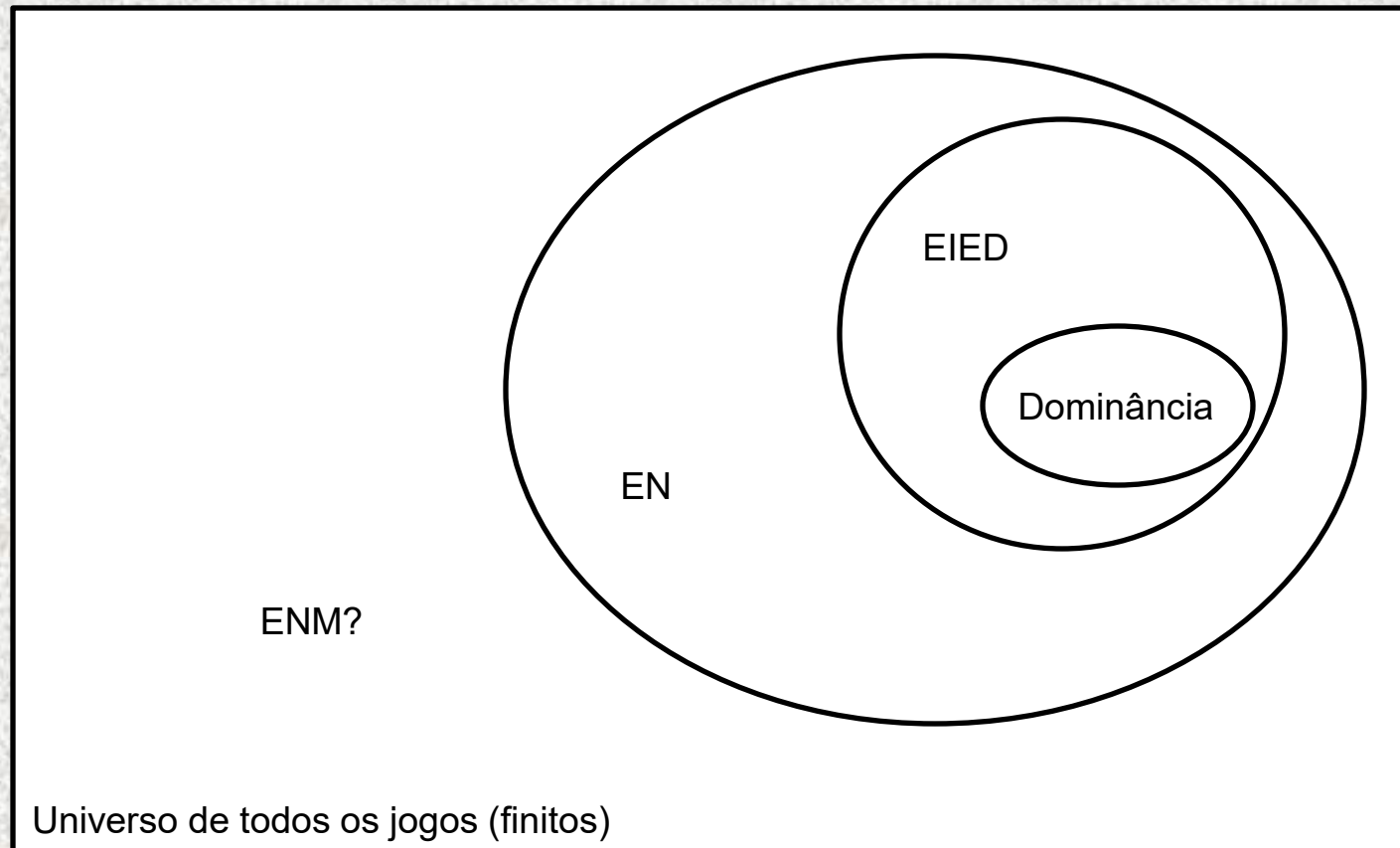
Um perfil de estratégias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*) \in \Delta S_1 \times \dots \times \Delta S_n$ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas (ENM) se e somente se, para cada jogador i ,

$$Eu_i(\sigma^*) = Eu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \quad \forall \sigma_i \in \Delta S_i$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Diagrama de Venn



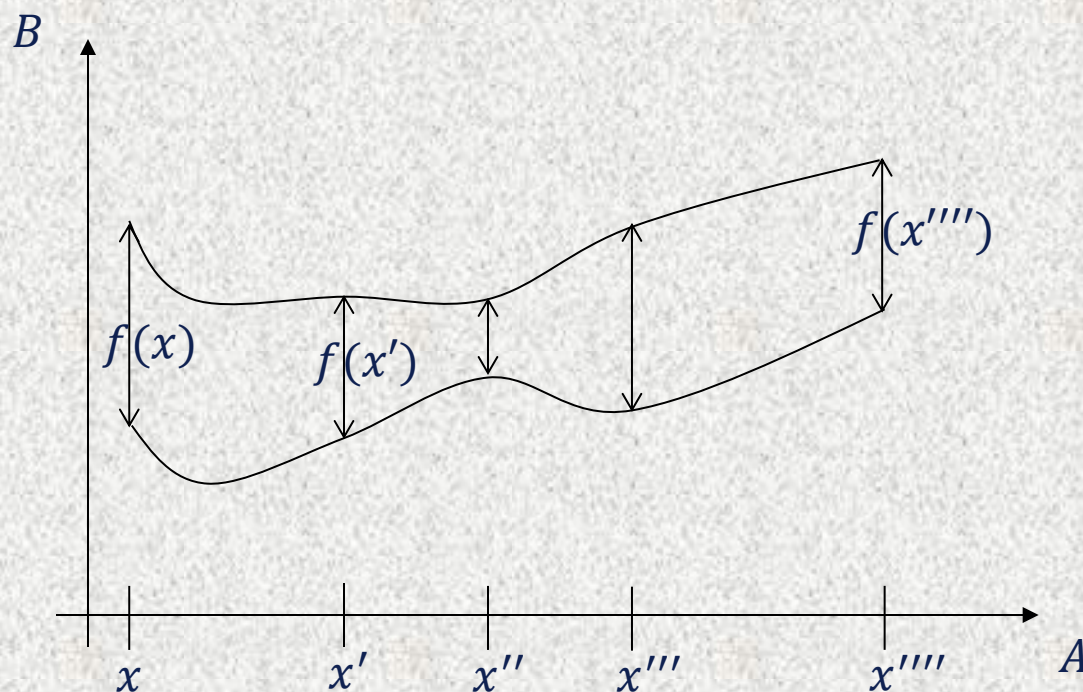
2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Definição-Sejam $A, B \subseteq R^k$ e seja $\wp(B) = 2^B$ o conjunto dos subconjuntos de B .

- (i) Uma aplicação $f: A \rightarrow \wp(B)$ é chamada uma *correspondência* de A em B .
- (ii) O *gráfico* da correspondência f é dado pelo conjunto:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in f(x)\}$$



2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

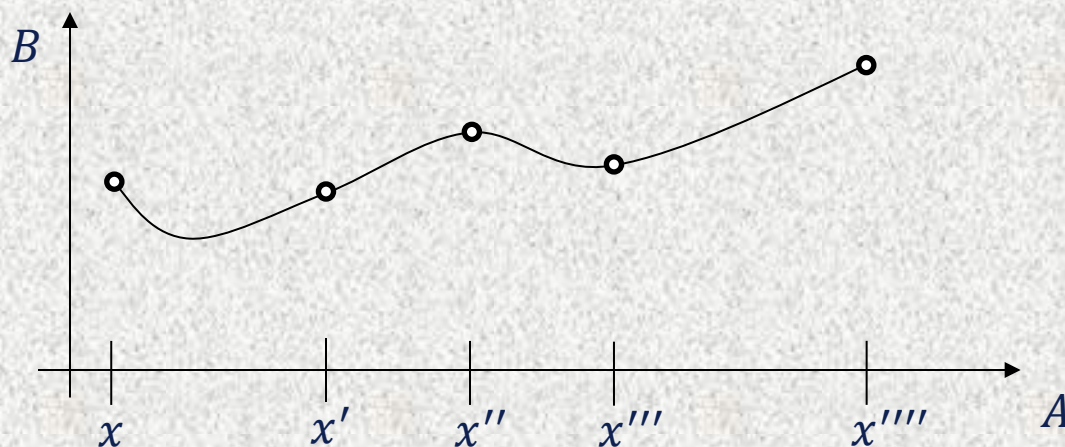
2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Definição-Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ e seja $\wp(B) = 2^B$ o conjunto dos subconjuntos de B .

- (i) Uma aplicação $f: A \rightarrow \wp(B)$ é chamada uma *correspondência* de A em B .
- (ii) O *gráfico* da correspondência f é dado pelo conjunto:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in f(x)\}$$

Exemplo-Toda função $g: A \rightarrow B$ pode ser vista como um caso particular de uma correspondência de A em B , f_g , definida por $f_g(a) = \{g(a)\}$.



Definição-Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ e seja $\wp(B) = 2^B$ o conjunto dos subconjuntos de B .

(i) Uma aplicação $f: A \rightarrow \wp(B)$ é chamada uma *correspondência* de A em B .

(ii) O *gráfico* da correspondência f é dado pelo conjunto:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in f(x)\}.$$

(iii) O gráfico de f é dito *fechado* se:

Quaisquer que sejam as sequências $\{a^n\}$ em A e $\{b^n\}$ em B , tais que:

$$\forall n, \quad b^n \in f(a^n),$$

se a^n converge para a e b^n converge para b ,

então $a \in A$ e $b \in f(a)$.

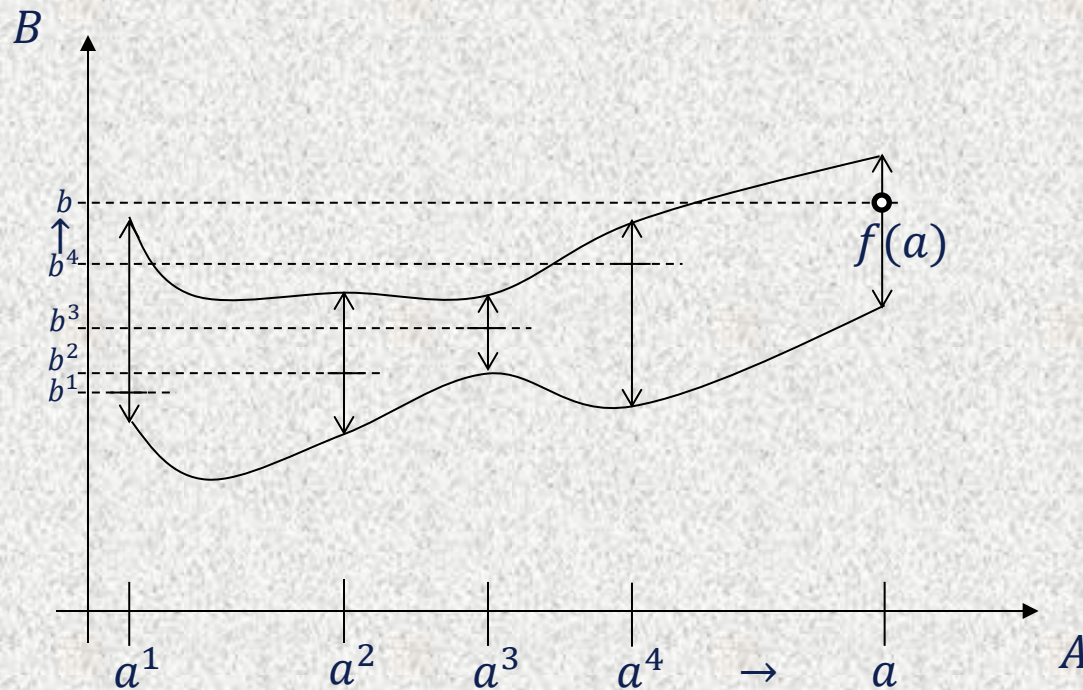
2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Definição-Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ e seja $\wp(B) = 2^B$ o conjunto dos subconjuntos de B .

(iii) O gráfico de f é dito *fechado* se quaisquer que sejam as sequências $\{a^n\}$ em A e $\{b^n\}$ em B , tais que $\forall n, b^n \in f(a^n)$,

se a^n converge para a e b^n converge para b , então $a \in A$ e $b \in f(a)$.



2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Definição-Sejam $A, B \subseteq R^k$ e seja $\wp(B) = 2^B$ o conjunto dos subconjuntos de B .

(i) Uma aplicação $f: A \rightarrow \wp(B)$ é chamada uma *correspondência* de A em B .

(ii) O *gráfico* da correspondência f é dado pelo conjunto:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in f(x)\}.$$

(iii) O gráfico de f é dito *fechado* se quaisquer que sejam as sequências

$\{a^n\}$ em A e $\{b^n\}$ em B , tais que $\forall n, b^n \in f(a^n)$,

se a^n converge para a e b^n converge para b , então $a \in A$ e $b \in f(a)$.

Exemplo-Toda função $g: A \rightarrow B$ pode ser vista como um caso particular de uma correspondência de A em B , f_g , definida por $f_g(a) = \{g(a)\}$.

Nesse caso, o gráfico de f_g é fechado se e somente se:

Se a^n converge para a , então $a \in A$

A é um subconjunto fechado de R^k

Se $b^n \in f(a^n)$ converge para b , então $b \in f(a)$

e g é contínua.

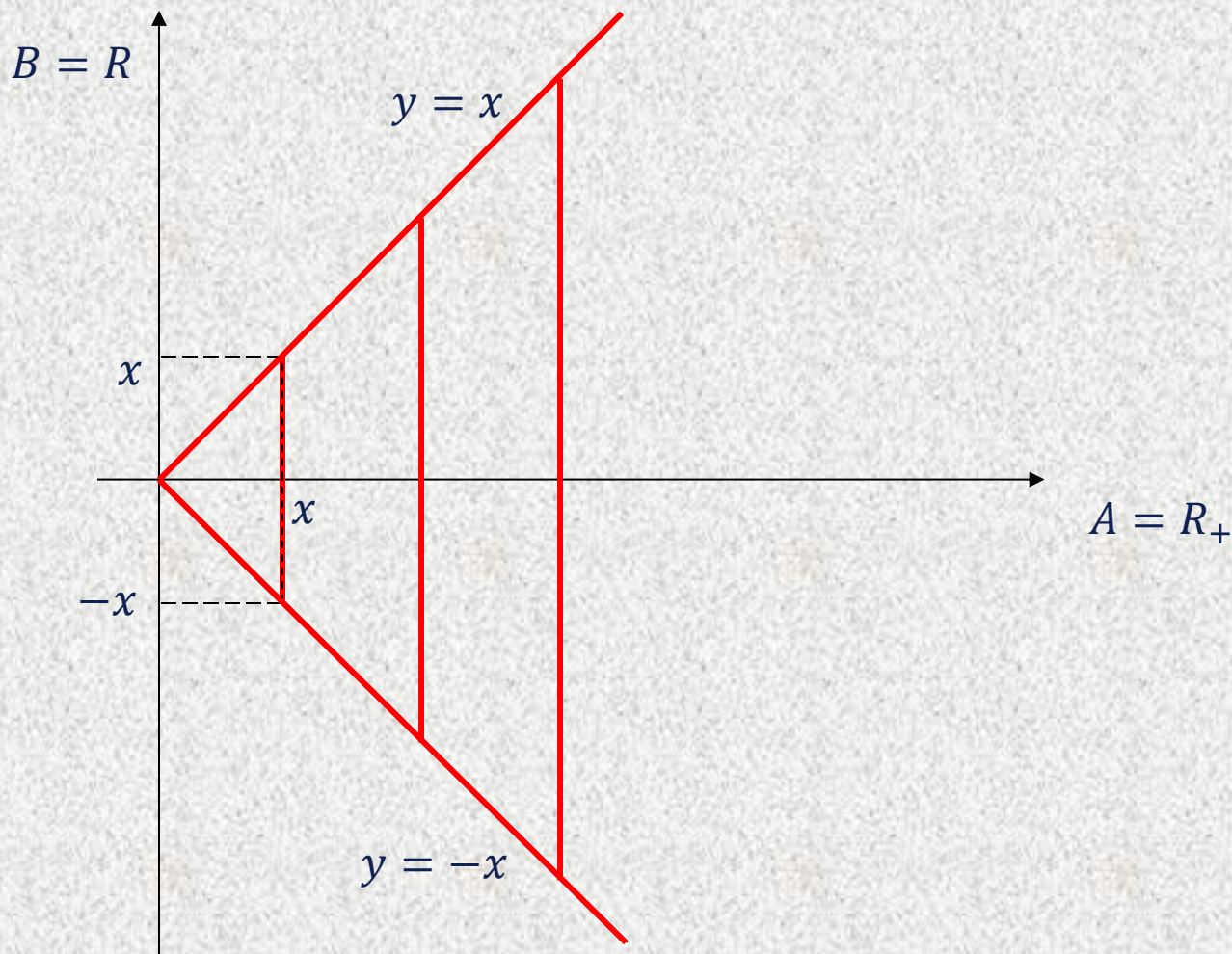
Portanto: O gráfico de uma função é fechado equivale à função ser contínua, definida em um conjunto fechado.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Exemplo- $f(x)=2x$.

Exemplo- Seja $f: R_+ \rightarrow \wp(R)$ definida por $f(x)=[-x, x]$. Então o gráfico de f é fechado e pode ser representado pela figura abaixo.

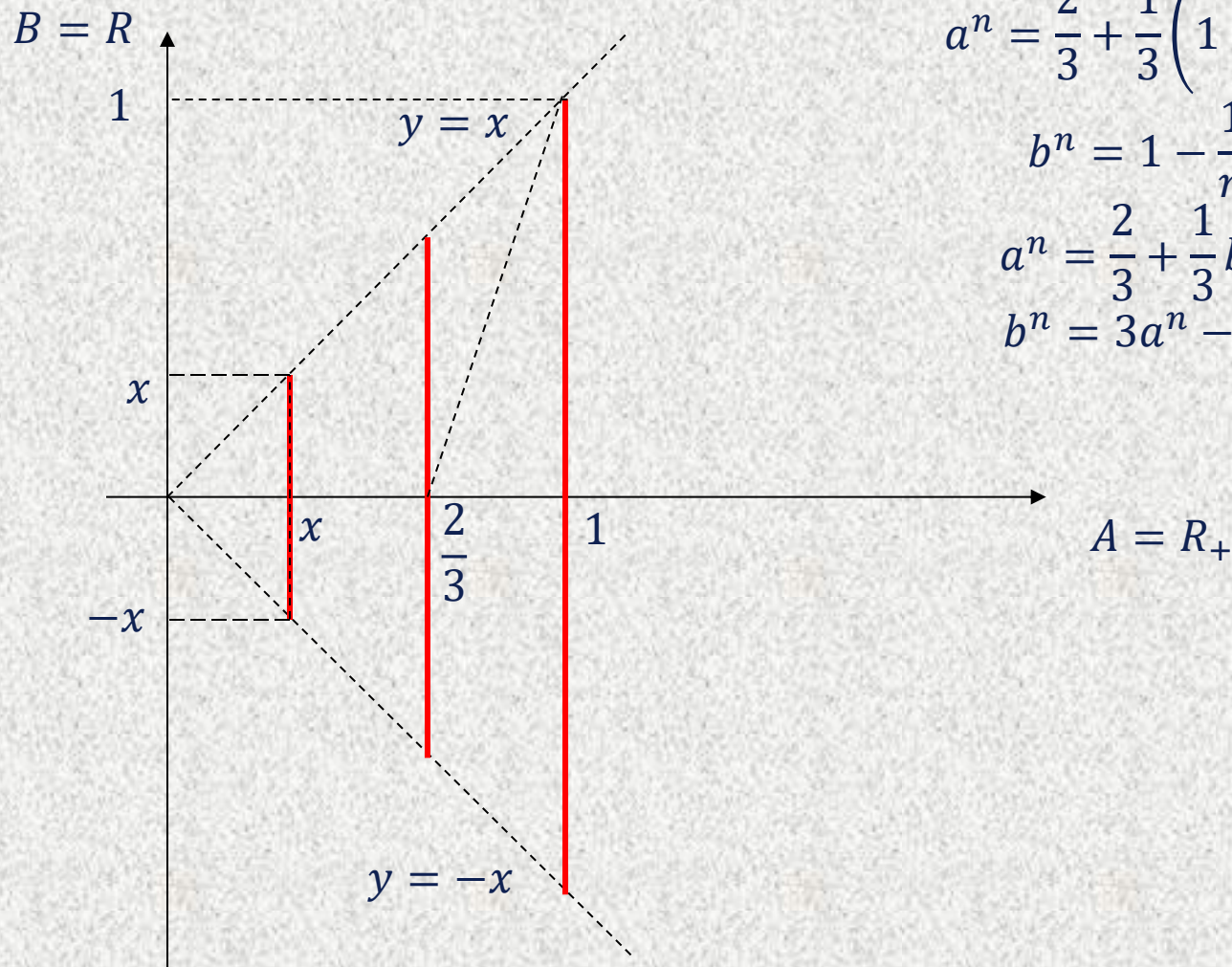


2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Exemplo- $f(x)=2x$.

Exemplo- Seja $f: R_+ \rightarrow \wp(R)$ definida por $f(x)=(-x, x)$, então o gráfico de f não é mais fechado.



$$a^n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$b^n = 1 - \frac{1}{n}$$

$$a^n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} b^n$$

$$b^n = 3a^n - 2$$

Exemplo- Considere um consumidor que possui uma renda I a ser usada na aquisição dos bens $1, 2, \dots, m$.

Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in R_+^m$ uma cesta genérica desses bens.

Se $p = (p_1, \dots, p_m) \in R_{++}^m$ for o vetor de preços de mercado dos bens na economia, então pode-se definir:

$$B(p) = \{x \in R_+^m \mid p \cdot x \leq I\}$$

O conjunto $B(p)$ é chamado conjunto orçamentário associado ao vetor de preços p e representa todas as cestas que o consumidor pode comprar, dada sua renda, se os preços de mercado forem dados por p .

Assim, B define uma correspondência de R_{++}^m em R_+^m , que é chamada de *correspondência orçamentária*.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Exemplo-Considere um consumidor que possui uma renda I a ser usada na aquisição dos bens $1, 2, \dots, m$. Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in R_+^m$ uma cesta genérica desses bens. Se $p = (p_1, \dots, p_m) \in R_{++}^m$ for o vetor de preços de mercado dos bens na economia, então $B(p) = \{x \in R_+^m \mid p \cdot x \leq I\}$

$B(p)$ é o conjunto orçamentário e B define uma correspondência de R_{++}^m em R_+^m , que é chamada de *correspondência orçamentária*.

Por exemplo, se $m = 1$ e $p > 0$, então:

$$B(p) = \left[0, \frac{I}{p}\right] \text{ e } B: \begin{cases} R_{++} \rightarrow \wp(R_{++}) \\ p \mapsto \left[0, \frac{I}{p}\right] \end{cases}$$

Denote por $\Delta \left[0, \frac{I}{p}\right]$ o intervalo em R determinado pelos pontos 0 e $\frac{I}{p}$

então,

$$B: \begin{cases} R_{++} \rightarrow \wp(R_{++}) \\ p \mapsto \Delta \left[0, \frac{I}{p}\right] \end{cases}$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Exemplo-Considere um consumidor que possui uma renda I a ser usada na aquisição dos bens $1, 2, \dots, m$. Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in R_+^m$ uma cesta genérica desses bens. Se $p = (p_1, \dots, p_m) \in R_{++}^m$ for o vetor de preços de mercado dos bens na economia, então $B(p) = \{x \in R_+^m \mid p \cdot x \leq I\}$

Por exemplo, se $m = 1$ e $p > 0$, $B: \begin{cases} R_{++} \rightarrow \wp(R_{++}) \\ p \mapsto \Delta\left[0, \frac{1}{p}\right] \end{cases}$

Se $m = 2$, e $p_1, p_2 > 0$, então

$$B(p_1, p_2) = \{x = (x_1, x_2) \mid p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I\},$$

que é o triângulo em R^2 determinado pelos pontos $(0,0), \left(0, \frac{I}{p_1}\right), \left(\frac{I}{p_2}, 0\right)$.

Denote esse triângulo em R^2 por $\Delta\left[(0,0), \left(0, \frac{I}{p_1}\right), \left(\frac{I}{p_2}, 0\right)\right]$

Então,

$$B: \begin{cases} R_{++}^2 \rightarrow \wp(R_{++}^2) \\ p \mapsto \Delta\left[(0,0), \left(0, \frac{I}{p_1}\right), \left(\frac{I}{p_2}, 0\right)\right] \end{cases}$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Exemplo- Considere um consumidor que possui uma renda I a ser usada na aquisição dos bens $1, 2, \dots, m$. Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in R_+^m$ uma cesta genérica desses bens. Se $p = (p_1, \dots, p_m) \in R_{++}^m$ for o vetor de preços de mercado dos bens na economia, então $B(p) = \{x \in R_+^m \mid p \cdot x \leq I\}$

$$B: \begin{cases} R_{++} \rightarrow \wp(R_{++}) \\ p \mapsto \Delta \left[0, \frac{1}{p} \right] \end{cases} \quad B: \begin{cases} R_{++}^2 \rightarrow \wp(R_{++}^2) \\ p \mapsto \Delta \left[(0,0), \left(0, \frac{I}{p_1}\right), \left(\frac{1}{p_2}, 0\right) \right] \end{cases}$$

Se $m = 3$, e $p_1, p_2, p_3 > 0$, então

$$B(p_1, p_2, p_3) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 \leq I\}$$

Denote por $\Delta \left[(0,0,0), \left(\frac{I}{p_1}, 0, 0\right), \left(0, \frac{I}{p_2}, 0\right), \left(0, 0, \frac{I}{p_3}\right) \right]$ a pirâmide triangular em R^3 determinada pelos quatro pontos acima. Então,

$$B: \begin{cases} R_{++}^3 \rightarrow \wp(R_{++}^3) \\ p \mapsto \Delta \left[(0,0,0), \left(\frac{I}{p_1}, 0, 0\right), \left(0, \frac{I}{p_2}, 0\right), \left(0, 0, \frac{I}{p_3}\right) \right] \end{cases}$$

Observação: Quando $I = p_i, \forall i$, os conjuntos Δ são chamados “simplexos” pela sua simplicidade (mais adiante)

Teorema (lema)-Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo e compacto e seja $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência. Suponha que:

- (i) Para todo $a \in A$, $f(a)$ é um subconjunto não-vazio e convexo de A .
- (ii) O gráfico de f é fechado.

Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$.

O ponto z é chamado um *ponto fixo* da correspondência f .

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

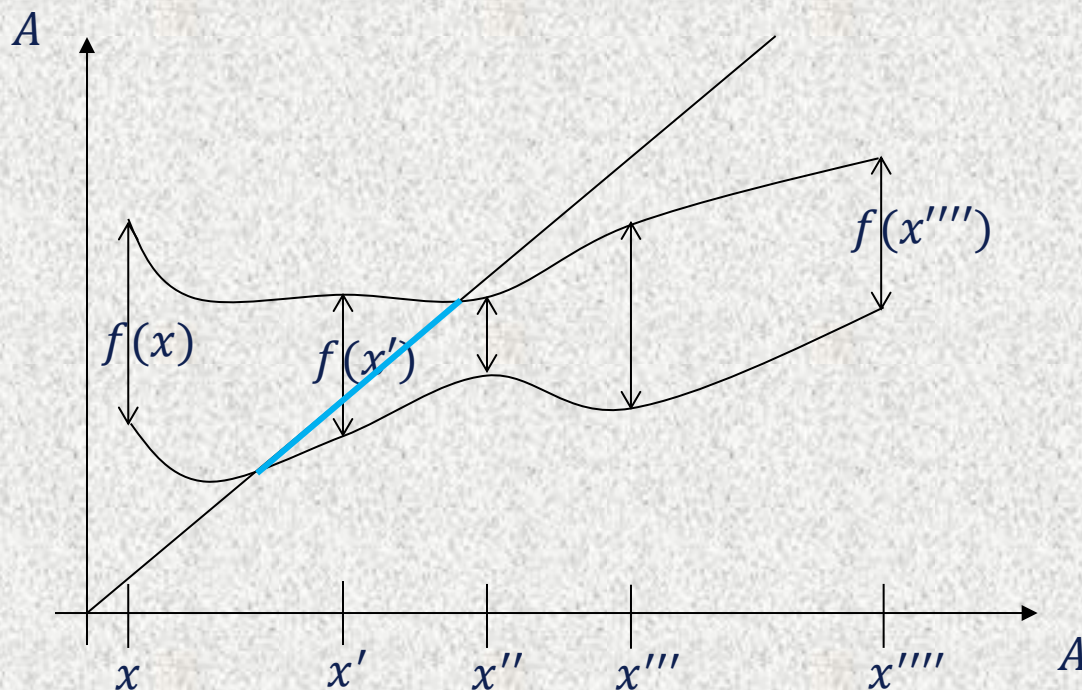
Teorema (lema)-Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo e compacto e seja $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência. Suponha que:

(i) Para todo $a \in A$, $f(a)$ é um subconjunto não-vazio e convexo de A .

(ii) O gráfico de f é fechado.

Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$. O ponto z é um *ponto fixo* da correspondência f .



2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Teorema (lema)-Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

Quadro

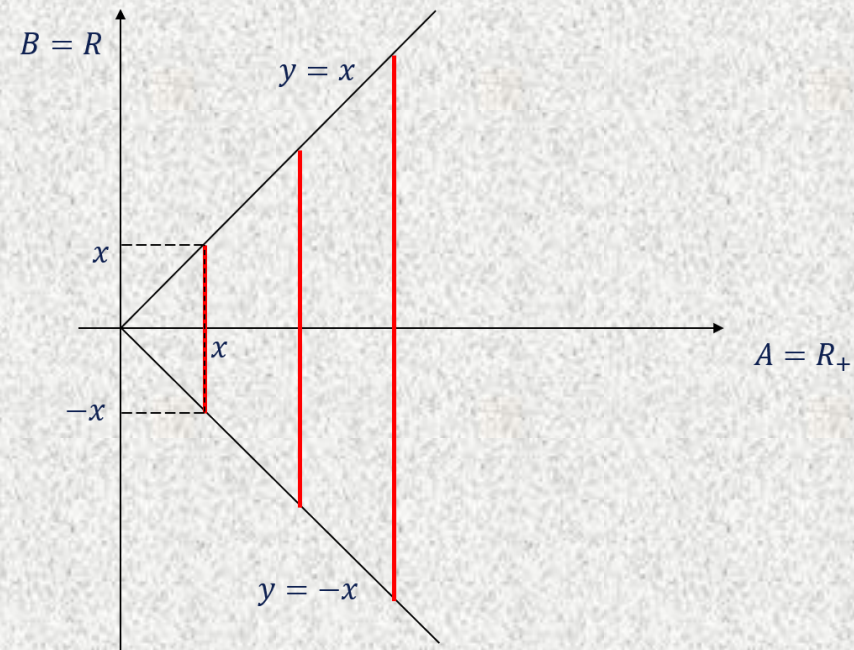
Observação-Em geral, um ponto $z \in A$ é chamado um ponto fixo de uma correspondência $A \rightarrow \wp(A)$ se $z \in f(z)$

Exemplo-No exemplo anterior, $f(x) = [-x, x]$.

Todo ponto $x \in R_+$ é um ponto fixo de f .

E se $f(x) = [-x/2, x/2]$?

E se $f(x) = [x-1, 1-x]$, $x \in [0, 1]$?



Teorema (lema)-Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

Quadro

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo e compacto e seja $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência. Suponha que:

- (i) Para todo $a \in A$, $f(a)$ é um subconjunto não-vazio e convexo de A .
- (ii) O gráfico de f é fechado.

Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$.

O ponto z é chamado um *ponto fixo* da correspondência f .

Exemplo-No caso particular em que f é uma função, um ponto fixo é um ponto $z \in A$ tal que $f(z) = z$.

Se $A = [a, b]$ e $f: A \rightarrow A$, então o conhecido Teorema do Valor Intermediário pode ser visto como um caso particular do Teorema de Kakutani.

Aparte: Concavidade e quase-concavidade.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio e convexo e seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

(i) f é côncava se: $\forall x, y \in A, \forall \alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

(ii) f é quase-côncava se: $\forall x, y \in A$, se $f(x) \geq f(y)$ então, $\forall \alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq f(y)$$

Observação: Toda função côncava é, naturalmente, quase-côncava, mas a volta não é verdadeira.

Por exemplo, toda função monotônica é quase-côncava, mas uma função estritamente convexa estritamente crescente não é côncava: $A = \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$

Portanto, o conceito de quase-concavidade é menos demandante/exigente que o conceito de concavidade.

Exemplo-Toda função linear é côncava e quase-côncava, mas não é estritamente côncava. Outros exemplos no quadro.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio e convexo e seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

(i) f é côncava se: $\forall x, y \in A, \forall \alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

(ii) f é quase-côncava se: $\forall x, y \in A$, se $f(x) \geq f(y)$ então, $\forall \alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq f(y)$$

2

Exemplo-Utilidade esperada.

		s_{21}	s_{22}
1	s_{11}	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}
	s_{12}	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}

$$\left((\sigma_1(s_{11}), \sigma_1(s_{12})), (\sigma_2(s_{21}), \sigma_2(s_{22})) \right)$$

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1(s_{11})\sigma_2(s_{21})a_{11} + \sigma_1(s_{11})\sigma_2(s_{22})a_{12} + \sigma_1(s_{12})\sigma_2(s_{21})a_{21} + \sigma_1(s_{12})\sigma_2(s_{22})a_{22}$$

$$u_1(\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma'_1, \sigma_2) =$$

$$(\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma'_1)(s_{11})\sigma_2(s_{21})a_{11} + (\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma'_1)(s_{11})\sigma_2(s_{22})a_{12}$$

$$+ (\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma'_1)(s_{12})\sigma_2(s_{21})a_{21} + (\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma'_1)(s_{12})\sigma_2(s_{22})a_{22} =$$

$$\alpha(\sigma_1(s_{11})\sigma_2(s_{21})a_{11} + \sigma_1(s_{11})\sigma_2(s_{22})a_{12} + \sigma_1(s_{12})\sigma_2(s_{21})a_{21} + \sigma_1(s_{12})\sigma_2(s_{22})a_{22}) +$$

$$(1 - \alpha)(\sigma'_1(s_{11})\sigma_2(s_{21})a_{11} + \sigma'_1(s_{11})\sigma_2(s_{22})a_{12} + \sigma'_1(s_{12})\sigma_2(s_{21})a_{21} + \sigma'_1(s_{12})\sigma_2(s_{22})a_{22})$$

$$= \alpha u_1(\sigma_1, \sigma_2) + (1 - \alpha)u_1(\sigma'_1, \sigma_2)$$

Kakutani. $A \subseteq R^n$ não vazio, convexo, compacto; e $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência.

(i) Para todo $a \in A$, $f(a) \subseteq A$ não-vazio e convexo.

(ii) O gráfico de f é fechado.

Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$.

éguas mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Teorema (Lema)-Existência de Equilíbrio de Nash.

Seja $J = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal tal que:

(i) Para todo jogador i , S_i é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de algum espaço euclidiano (subespaço vetorial de R^n).

(ii) Para todo jogador i , u_i é uma função contínua em $s = (s_1, \dots, s_n)$ e quase-côncava em S_i .

Então existe pelo menos um equilíbrio de Nash no jogo J .

Demonstração. Defina, para cada $i=1, \dots, n$, a correspondência *melhor resposta*:

$$MR_i: S_{-i} \rightarrow \wp(S_i)$$

$$s_{-i} \mapsto MR_i(s_{-i}) = \operatorname{argmax}_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) = \{s_i \in S_i \mid u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(r, s_{-i}), \forall r \in S_i\}.$$

Então:

(i) $MR_i(s_{-i})$ é não-vazio.

Como S_i é compacto e u_i é contínua em s_i , então para todo $s_{-i} \in S_{-i}$, $MR_i(s_{-i})$ é não-vazio.

Kakutani. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo, compacto; e $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência.

(i) Para todo $a \in A$, $f(a) \subseteq A$ não-vazio e convexo.

(ii) O gráfico de f é fechado.

Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$.

éguas mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Teorema (Lema)-Existência de Equilíbrio de Nash.

Seja $J = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal tal que:

(i) Para todo jogador i , S_i é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de algum espaço euclidiano.

(ii) Para todo jogador i , u_i é uma função contínua em $s = (s_1, \dots, s_n)$ e quase-côncava em s_i .

Então existe pelo menos um equilíbrio de Nash no jogo J .

Demonstração. Defina, para cada $i=1, \dots, n$, a correspondência *melhor resposta*:

$$MR_i: S_{-i} \rightarrow \wp(S_i)$$

$$s_{-i} \mapsto MR_i(s_{-i}) = \operatorname{argmax}_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) = \{s_i \in S_i \mid u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(r, s_{-i}), \forall r \in S_i\}.$$

Então:

(i) $MR_i(s_{-i})$ é não-vazio.

(ii) $MR_i(s_{-i})$ é um conjunto convexo.

Como u_i é quase-côncava em s_i , $\forall s_i, s'_i \in S_i$, $\forall \alpha \in [0, 1]$,

$$s_i, s'_i \in MR_i(s_{-i}) \Rightarrow u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \Rightarrow u_i(\alpha s_i + (1-\alpha)s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \Rightarrow \alpha s_i + (1-\alpha)s'_i \in MR_i(s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}. \text{ Assim, } MR_i(s_{-i}) \text{ é um conjunto convexo.}$$

Kakutani. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo, compacto; e $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência.

(i) Para todo $a \in A$, $f(a) \subseteq A$ não-vazio e convexo.

(ii) O gráfico de f é fechado. Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$.

Existas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Teorema (Lema)-Existência de Equilíbrio de Nash.

Seja $J = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal tal que:

(i) Para todo jogador i , S_i é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de algum espaço euclidiano.

(ii) Para todo jogador i , u_i é uma função contínua em $s = (s_1, \dots, s_n)$ e quase-côncava em s_i .

Então existe pelo menos um equilíbrio de Nash no jogo J .

Demonstração. Defina, para cada $i=1, \dots, n$, a correspondência *melhor resposta*:

$$MR_i: S_{-i} \rightarrow \wp(S_i) \quad s_{-i} \mapsto MR_i(s_{-i}) = \operatorname{argmax} u_i(s_i, s_{-i}) = \{s_i \in S_i \mid u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(r, s_{-i}), \forall r \in S_i\}.$$

(i) $MR_i(s_{-i})$ é não-vazio. (ii) $MR_i(s_{-i})$ é um conjunto convexo.

(iii) O gráfico de MR_i é fechado.

Seja $s_{-i,k}$ uma sequência em S_{-i} e, para cada k , seja $s_{i,k} \in MR_i(s_{-i,k})$, tais que $s_{-i,k} \rightarrow s_{-i}$ e $s_{i,k} \rightarrow s_i$.

Como S_i e S_{-i} são conjuntos compactos $s_i \in S_i$ e $s_{-i} \in S_{-i}$.

Além disso, por construção, para cada k , $u_i(s_{i,k}, s_{-i,k}) \geq u_i(s'_i, s_{-i,k}), \forall s'_i \in S_i$.

Como u_i é contínua em S , tomando o limite quando $k \rightarrow +\infty$ temos:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}), \forall s'_i \in S_i \Rightarrow s_i \in MR_i(s_{-i}).$$

Logo, o gráfico de MR_i é fechado.

Kakutani. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo, compacto; e $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência.

(i) Para todo $a \in A$, $f(a) \subseteq A$ não-vazio e convexo.

(ii) O gráfico de f é fechado.

Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$.

éguas mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Teorema (Lema)-Existência de Equilíbrio de Nash.

Seja $J = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal tal que:

(i) Para todo jogador i , S_i é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de algum espaço euclidiano.

(ii) Para todo jogador i , u_i é uma função contínua em $s = (s_1, \dots, s_n)$ e quase-côncava em s_i .

Demonstração. $MR_i: S_{-i} \rightarrow \wp(S_i)$

$$s_{-i} \mapsto MR_i(s_{-i})$$

(iv) Defina agora $MR: S \rightarrow \wp(S)$ por $MR(s) = MR_1(s_{-1}) \times \dots \times MR_n(s_{-n})$.

Então, MR satisfaz as condições do teorema de Kakutani.

Assim, existe $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ tal que $s_i \in MR(s_{-i})$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Logo s é um equilíbrio de Nash do jogo.

Teorema (Lema)-Existência de Equilíbrio de Nash.

Seja $J=(n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal tal que:

- (i) Para todo jogador i , S_i é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de algum espaço euclidiano.
- (ii) Para todo jogador i , u_i é uma função contínua em $s=(s_1, \dots, s_n)$ e quase-côncava em s_i .

Então existe pelo menos um equilíbrio de Nash no jogo J .

Exemplos.

Cournot, Bertrand com produtos não homogêneos (vide notas de aula)

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Teorema (Lema)-Existência de Equilíbrio de Nash.

Seja $J=(n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal tal que:

- (i) Para todo jogador i , S_i é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de algum espaço euclidiano.
- (ii) Para todo jogador i , u_i é uma função contínua em $s=(s_1, \dots, s_n)$ e quase-côncava em s_i .

Então existe pelo menos um equilíbrio de Nash no jogo J .

Teorema-Existência de Equilíbrio de Nash (Nash 1950).

Seja $J=(n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal onde cada jogador possui um número finito de estratégias.

Então J possui pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Demonstração. Basta considerar o jogo associado $\Delta J=(n; \Delta S_1, \dots, \Delta S_n; Eu_1, \dots, Eu_n)$ e observar que:

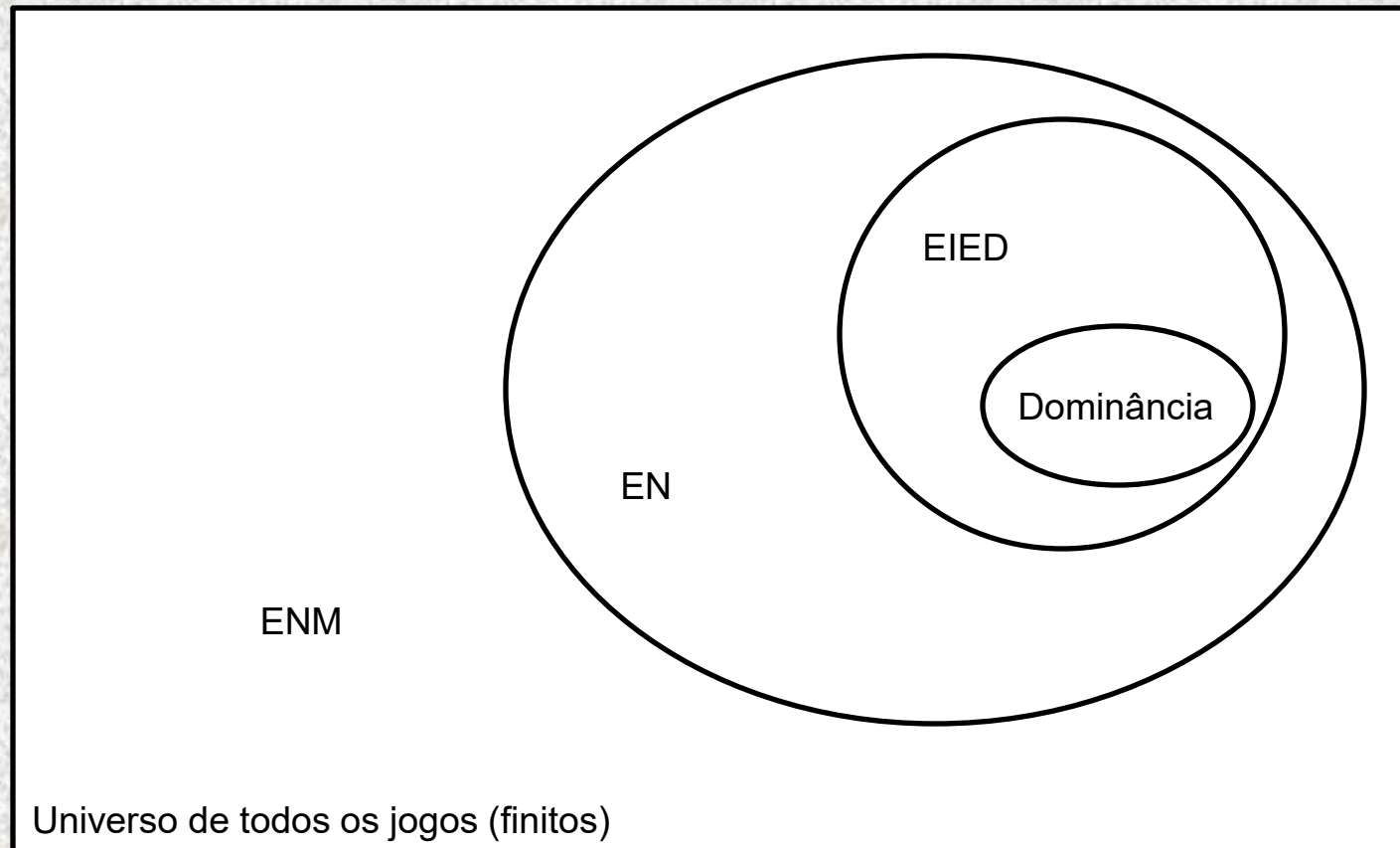
os simplexes ΔS_i satisfazem as condições (i) do teorema anterior

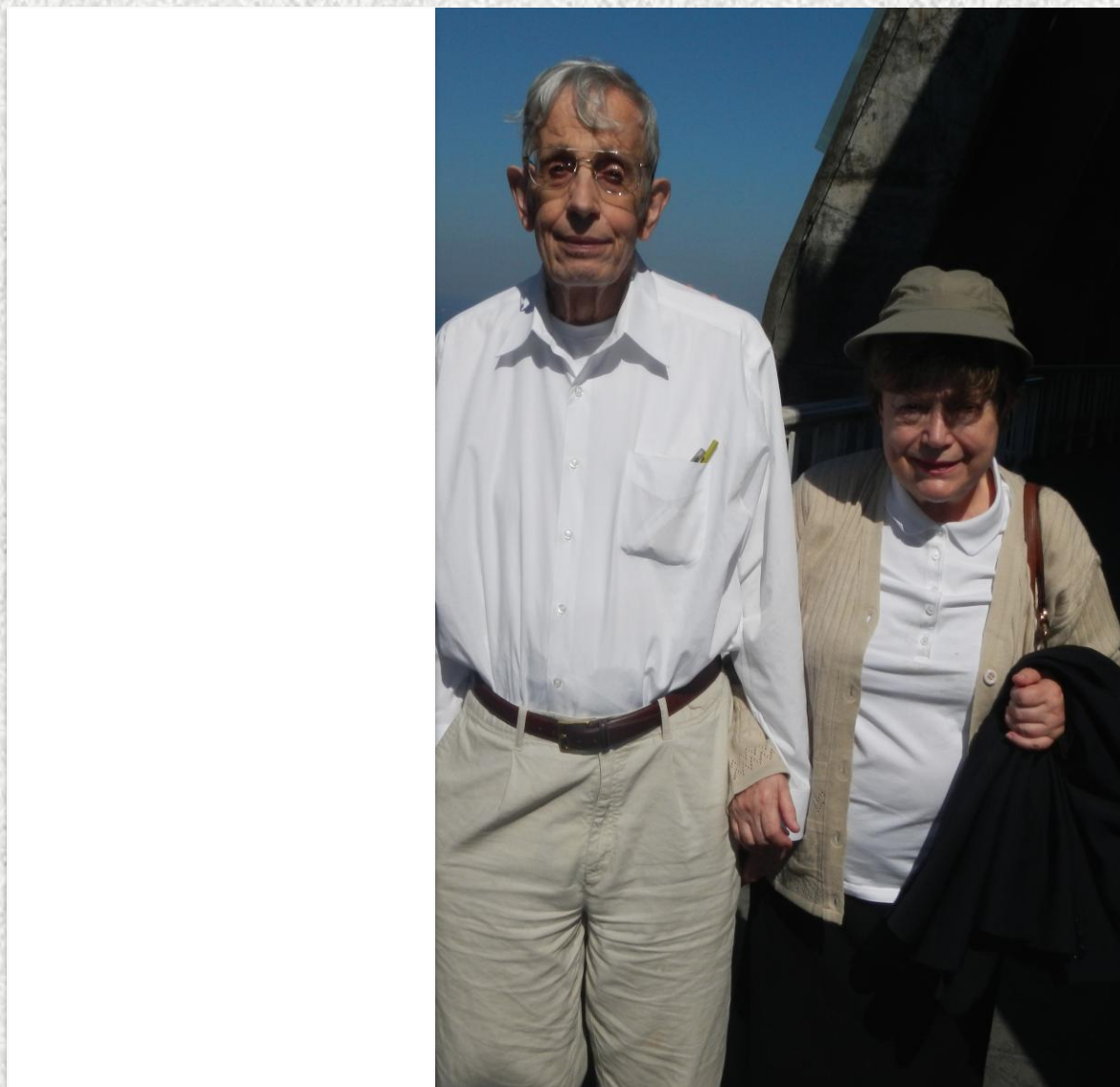
e as funções de utilidade esperada Eu_i são lineares, e portanto contínuas e quase-côncavas, em seus argumentos.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Diagrama de Venn





Observação.

Em geral, número ímpar de $EM(M)$, exceto em casos degenerados (de medida zero).

Wilson, Robert. 1971. "Computing Equilibria of N-Person Games." *SIAM Journal on Applied Mathematics* 21 (1): 80–87.

Harsanyi, John C. 1973. "Oddness of the Number of Equilibrium Points: A New Proof." *International Journal of Game Theory* 2: 235–250

Nash, John F. "Non-Cooperative Games." *Annals of Mathematics* 54, no. 2 (1951): 286–295.

Nash, John F. "Equilibrium Points in n-Person Games." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, no. 1 (1950): 48–49.

Nash, John F. "The Bargaining Problem." *Econometrica* 18, no. 2 (1950): 155–162.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.3. Exercícios extras

Exercício- Três estratégias- Encontre todos os EN do jogo abaixo.

		2		
		<i>e</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	<i>a</i>	9,8	2,8	2,0
	<i>m</i>	9,2	8,6	0,3
	<i>b</i>	0,2	4,0	8,0

1: $a \Rightarrow MR_2: e, c$

2: $e \Rightarrow MR_1: a, m.$

Portanto, encontramos o EN (a, e)

2: $c \Rightarrow MR_1: m \quad \times$

1: $m \Rightarrow MR_2: c \Rightarrow MR_1: m.$

Portanto, encontramos o EN (m, c)

1: $b \Rightarrow MR_2: e \Rightarrow MR_1: a, m. \quad \times$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.3. Exercícios extras

Exercício- Três estratégias- Encontre todos os EN do jogo abaixo.

		2		
		<i>e</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	<i>a</i>	9,8	2,8	2,0
	<i>m</i>	9,2	8,6	0,3
	<i>b</i>	0,2	4,0	8,0

Será que existem EN em que algum jogador joga uma estratégia mista?

$$\sigma_1(m) > 0?$$

Se houver um ENM em que 1 joga *m* com alguma probabilidade não nula, então 2 nunca escolherá *d*, pois será melhor escolher *c* a escolher *d*

Então, em um tal equilíbrio 1 nunca jogará *b* já que a estratégia *m* gera maior payoff esperado.

Mas se 1 não joga *b* com nenhuma probabilidade positiva e joga *m* com alguma probabilidade positiva, então se 2 jogar *c* também terá uma utilidade esperada maior que se jogar *e*

Portanto, nesse equilíbrio hipotético, 2: *c*, mas então, 1: *m* e voltamos ao EN (*m*, *c*)

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.3. Exercícios extras

Exercício- Três estratégias- Encontre todos os EN do jogo abaixo.

		2		
		<i>e</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	<i>a</i>	9,8	2,8	2,0
	<i>m</i>	9,2	8,6	0,3
	<i>b</i>	0,2	4,0	8,0

Será que existem EN em que algum jogador joga uma estratégia mista?

$$\sigma_1(m) = 0?$$

Por outro lado, se houver um ENM em que 1 jogar *m* com probabilidade nula, então 1 misturará estritamente entre *a* e *b*

Mas então, 2 escolherá *e*, pois lhe dará maior payoff esperado que *c* ou *d*

Mas então, voltamos ao EN (*a*, *e*)

Logo, não existe mais nenhum EN nesse jogo.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.3. Exercícios extras

Exercício- Três estratégias- Encontre todos os EN do jogo abaixo.

		2		
		<i>e</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	<i>a</i>	9,8	2,8	2,0
	<i>m</i>	9,2	8,6	0,3
	<i>b</i>	0,2	4,0	8,0

Questões:

- (i) Se você fosse jogar esse jogo, apostaria em algum dos dois equilíbrios encontrados?
- (ii) Se você fosse tentar encontrar os ENM desse jogo a partir da definição que considera todas as MR (melhores respostas de cada jogador), como faria?
- (iii) O resultado que encontramos neste exemplo sugere a seguinte conjectura.
“Se um jogo finito tiver apenas dois EN (em estratégias puras) e os payoffs correspondentes forem tal que um Pareto-domina estritamente o outro, então não existe EN em que algum jogador escolhe uma estratégia mista.”

Questão: O resultado que encontramos neste exemplo sugere a seguinte conjectura.

“Se um jogo finito tiver apenas dois EN (em estratégias puras) e os payoffs correspondentes forem tal que um Pareto-domina estritamente o outro, então não existe EN em que algum jogador escolhe uma estratégia mista.”

Para explorar essa conjectura, considere o jogo a seguir:

		2	
		r_1	r_2
1	s_1	9, 8	2, 8
	s_2	9, 2	8, 6

		2	
		r_1	r_2
1	s_1	a, b	c, d
	s_2	e, f	g, h

- Suponha, inicialmente, que: $a > e; b > d; h > f; g > c$. Prove que esse jogo tem exatamente dois EN em estratégias puras.
- Mostre que esse jogo possui, adicionalmente, um único EN em que ambos os jogadores jogam estratégias estritamente mistas.
- Esse resultado leva em consideração qualquer relação entre os payoffs dos EN em estratégias puras? O que isso lhe diz a respeito da conjectura?
- Suponha agora que $b = d$ e que $a = c$. Como isso afeta os cálculos anteriores? O que isso lhe diz a respeito da inexistência de ENM não trivial no exercício anterior?