

Teoria dos Jogos

Prof. Maurício Bugarin

Eco/UnB

EPRG-Economics and Politics Research Group

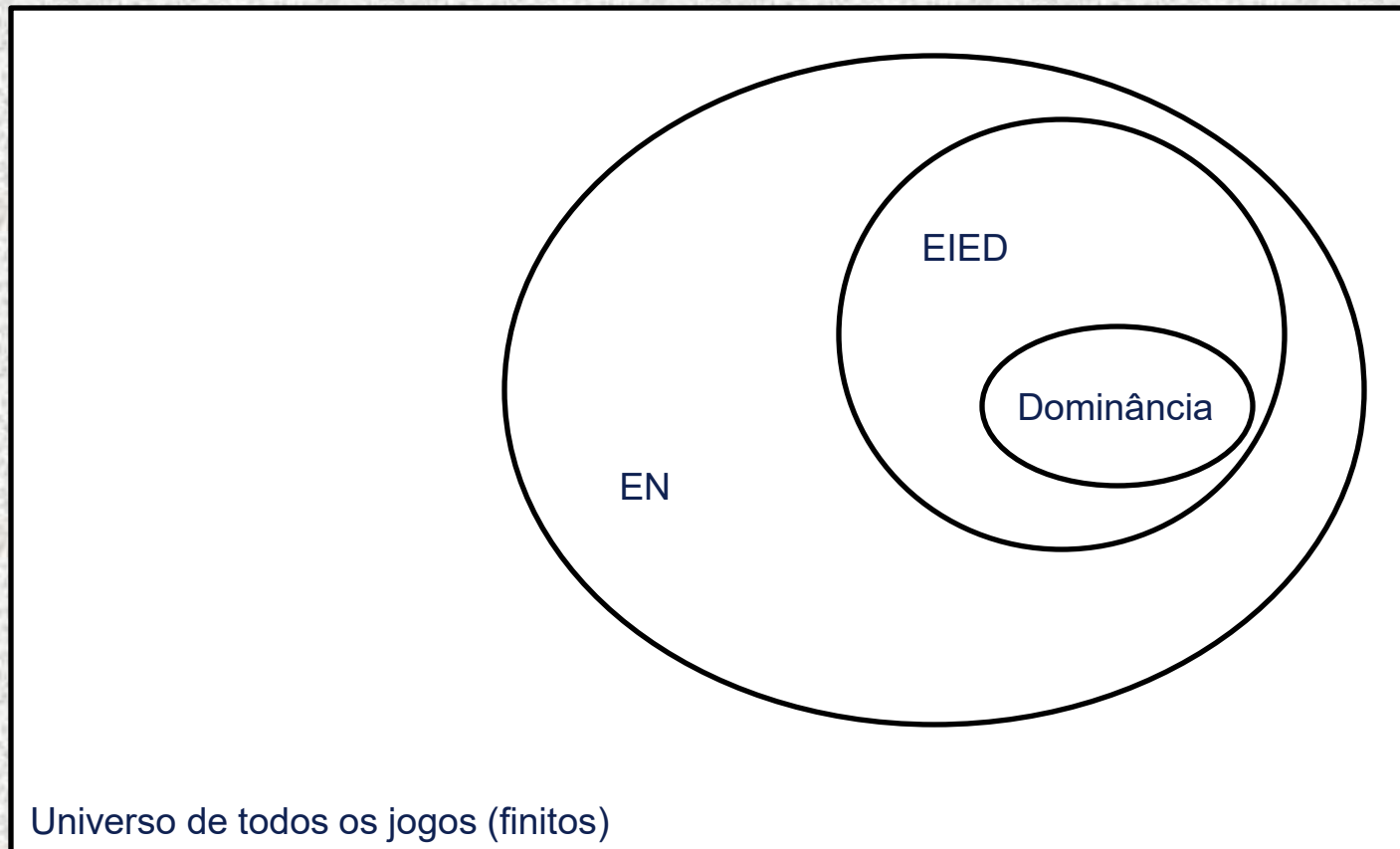
Jogos estáticos com informação completa

Parte 4

2.JEIC 2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.3. Equilíbrio de Nash

Diagrama de Venn II



2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Experimento: Par ou ímpar? Pênalti

		2	
		p	i
1	P	1, -1	-1, 1
	I	-1, 1	1, -1

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Definição- Seja $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo na forma normal no qual os conjuntos de estratégias dos agentes são finitos: $|S_i| = n_i, i = 1, \dots, n$.

Uma *estratégia mista* para o agente i é uma distribuição de probabilidades definida sobre o conjunto S_i :

$$\begin{aligned} \sigma_i: S_i &\rightarrow [0, 1] && \text{tal que} && \sum_k \sigma_i(s_{ik}) = 1 \\ s_{ik} &\mapsto \sigma_i(s_{ik}) \end{aligned}$$

Um *perfil de estratégias mistas* $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ é uma seleção de uma estratégia mista para cada jogador $i, i = 1, \dots, n$.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Definição- Sejam $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo na forma normal finito e $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ um perfil de estratégias (mistas).

Então a **consequência** do jogo para um jogador i quando todos jogam de acordo com o perfil σ é dada por:

$$U_i(\sigma) = Eu_i(\sigma) = \sum \sigma_1(s_1) \sigma_2(s_2) \cdots \sigma_n(s_n) \times u_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

O somatório é tomado sobre todos os possíveis perfis de estratégias puras $s = (s_1, \dots, s_n)$.

O produto $\sigma_1(s_1) \dots \sigma_n(s_n)$ corresponde à probabilidade do perfil s ser o perfil jogado, e $u_i(s_1, \dots, s_n)$ é o payoff do jogador i quando esse perfil é de fato realizado.

Portanto, $Eu_i(\sigma)$ é o payoff esperado (a utilidade esperada) do jogador i quando cada jogador j escolhe a estratégia mista $\sigma_j, j = 1, \dots, n$.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- par ou ímpar?

		2	
		p	i
1	P	1, -1	-1, 1
	I	-1, 1	1, -1

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right)$$

$$= \left(\left(\frac{1}{4} \right) P + \left(\frac{3}{4} \right) I, \left(\frac{2}{3} \right) p + \left(\frac{1}{3} \right) i \right)$$

$$Eu_1(\sigma) = \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{2}{3} \right) 1 + \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{3} \right) (-1) + \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{2}{3} \right) (-1) + \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{3} \right) 1 = 1/12 - 3/12 = -\frac{1}{6}$$

$$Eu_2(\sigma) = \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{2}{3} \right) (-1) + \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{3} \right) 1 + \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{2}{3} \right) 1 + \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{3} \right) (-1) = -\frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{6}$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- *Pedra, papel ou tesoura?*

		2		
		<i>pe</i>	<i>pa</i>	<i>te</i>
1	<i>PE</i>	0, 0	-1, 1	1, -1
	<i>PA</i>	1, -1	0, 0	-1, 1
	<i>TE</i>	-1, 1	1, -1	0, 0

$$\sigma = (\alpha PE + \beta PA + \gamma TE, \lambda pe + \mu pa + \nu te) = ((\alpha, \beta, \gamma), (\lambda, \mu, \nu))$$

$$\text{em que } \alpha + \beta + \gamma = \lambda + \mu + \nu = 1$$

$$\sigma = (0, 1/2, 1/2), \mu = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$$

$$Eu_1(\sigma, \mu) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)0 = -\frac{1}{3}$$

$$Eu_2(\sigma, \mu) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)0 = \frac{1}{3}$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Definição: Seja $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo finito na forma normal.

A partir de $\mathcal{J}$, pode-se definir o jogo $\Delta\mathcal{J} = (n; \Delta S_i; Eu_i, i = 1, \dots, n)$, em que:

ΔS_i é o conjunto de todas as distribuições de probabilidades sobre o conjunto S_i

Portanto, uma estratégia mista do jogo $\mathcal{J}$ nada mais é que uma estratégia pura do jogo $\Delta\mathcal{J}$.

Equilíbrio de Nash para estratégias mistas: EN em estratégias puras do jogo $\Delta\mathcal{J}$:

Um perfil de estratégias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*) \in \Delta S_1 \times \dots \times \Delta S_n$ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas (ENM) se e somente se, para cada jogador i ,

$$Eu_i(\sigma^*) \geq Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \quad \forall \sigma_i \in \Delta S_i$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- par ou ímpar?

		2	
		$\{\mu\}$ p	$\{1 - \mu\}$ i
1	$\{\lambda\}$ P	1, -1	-1, 1
	$\{1 - \lambda\}$ I	-1, 1	1, -1

$$\begin{aligned} \text{Jogador 1: } Eu_1(\lambda, \mu) &= \lambda\mu - \lambda(1-\mu) - \mu(1-\lambda) + (1-\lambda)(1-\mu) \\ &= (1 - 2\lambda)(1-2\mu) \end{aligned}$$

$$\text{Jogador 2: } Eu_2(\lambda, \mu) = -(1 - 2\lambda)(1-2\mu)$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo: *par ou ímpar?*

Jogador 1: $Eu_1(\lambda, \mu) = (1 - 2\lambda)(1 - 2\mu)$

Jogador 2: $Eu_2(\lambda, \mu) = -(1 - 2\lambda)(1 - 2\mu)$

Se $\mu < 1/2$

então MR_1 : $\lambda = 0$

Se $\mu = 1/2$

então qualquer valor de λ é uma MR_1

Se $\mu > 1/2$

então MR_1 : $\lambda = 1$

Se $\lambda < 1/2$

então MR_2 : $\mu = 1$

Se $\lambda = 1/2$

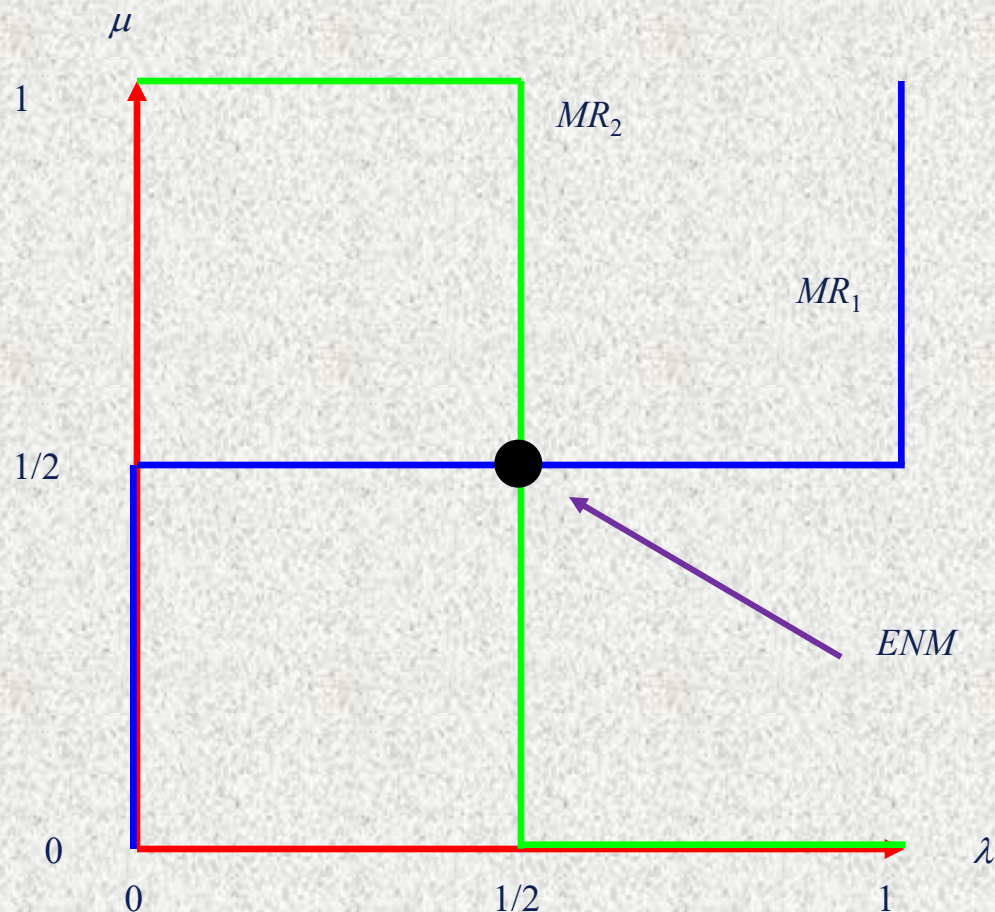
então qualquer valor de μ é uma MR_2

Se $\lambda > 1/2$

então MR_2 : $\mu = 0$

2

		p	i
1	P	1, -1	-1, 1
	I	-1, 1	1, -1



2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- Jogo do Banana

ENM: (λ, μ) . Abordagem alternativa:

$$UE_1(D|\mu) = 0\mu + 10(1 - \mu) = 10 - 10\mu$$

$$UE_1(M|\mu) = 50\mu - 100(1 - \mu) = 150\mu - 100$$

$$D \succ_1 M \Leftrightarrow 10 - 10\mu > 150\mu - 100$$

$$\Leftrightarrow 110 > 160\mu \Leftrightarrow \mu < \frac{11}{16}$$

Se $\mu < 11/16$ então $MR_1: \lambda = 1$

Se $\mu = 11/16$ então qualquer valor de λ é uma MR_1

Se $\mu > 11/16$ então $MR_1: \lambda = 0$

$$UE_2(d|\lambda) = 0\lambda + 10(1 - \lambda) = 10 - 10\lambda$$

$$UE_2(m|\lambda) = 50\lambda - 100(1 - \lambda) = 150\lambda - 100$$

$$d \succ_2 m \Leftrightarrow 10 - 10\lambda > 150\lambda - 100 \Leftrightarrow 110 > 160\lambda \Leftrightarrow \lambda < \frac{11}{16}$$

Se $\lambda < 11/16$ então $MR_2: \mu = 1$

Se $\lambda = 11/16$ então qualquer valor de μ é uma MR_2

Se $\lambda > 11/16$ então $MR_2: \mu = 0$

		2	
		d	m
1	D	0, 0	10, 50
	M	50, 10	-100, -100

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

		2	
		<i>d</i>	<i>m</i>
1	<i>D</i>	0, 0	10, 50
	<i>M</i>	50, 10	-100, -100

Exemplo: *Jogo do Banana*

Se $\mu < 11/16$ então $MR_1: \lambda = 1$

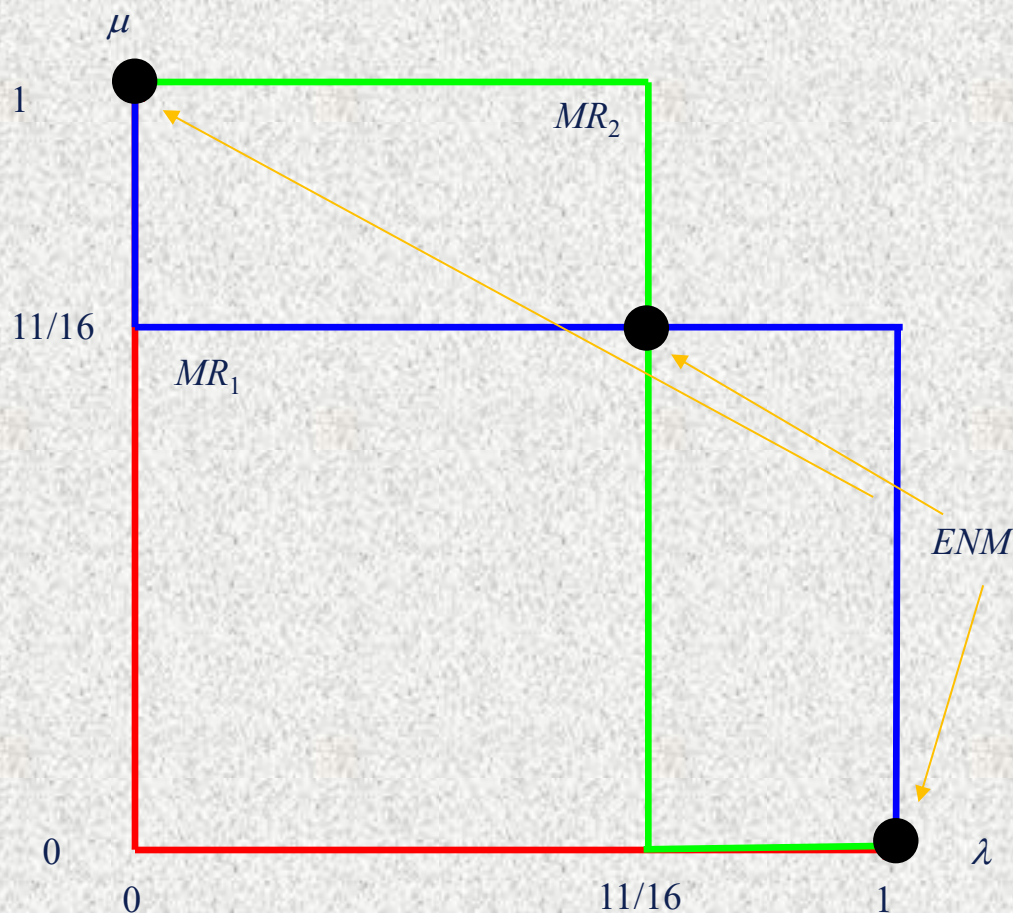
Se $\mu = 11/16$ então qualquer valor de λ é uma MR_1

Se $\mu > 11/16$ então $MR_1: \lambda = 0$

Se $\lambda < 11/16$ então $MR_2: \mu = 1$

Se $\lambda = 11/16$ então qualquer valor de μ é uma MR_2

Se $\lambda > 11/16$ então $MR_2: \mu = 0$



Observação: Dado o elevado custo associado ao perfil (M, m) , em equilíbrio os jogadores decidem por essa estratégia com baixa probabilidade: $5/16$.

Probabilidade de acidente: $\left(\frac{5}{16}\right)^2 \cong 0,098$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- Batalha dos Sexos Assimétrico $0 < \epsilon < 1$

ENM: (λ, μ) . Abordagem alternativa:

$$UE_1(B|\mu) = (3 + \epsilon)\mu + (1 + \epsilon)(1 - \mu) = 2\mu + 1 + \epsilon$$

$$UE_1(S|\mu) = 0\mu + 2(1 - \mu) = 2 - 2\mu$$

$$B \succ_1 S \Leftrightarrow 2\mu + 1 + \epsilon > 2 - 2\mu \Leftrightarrow 4\mu > 1 - \epsilon \Leftrightarrow \mu > \frac{1 - \epsilon}{4}$$

Se $\mu > \frac{1 - \epsilon}{4}$ então $MR_1: \lambda=1$

Se $\mu = \frac{1 - \epsilon}{4}$ então qualquer valor de λ é uma MR_1

Se $\mu < \frac{1 - \epsilon}{4}$ então $MR_1: \lambda=0$

$$UE_2(b|\lambda) = 2\lambda + 0(1 - \lambda) = 2\lambda$$

$$UE_2(s|\lambda) = \lambda + 3(1 - \lambda) = 3 - 2\lambda$$

$$b \succ_2 s \Leftrightarrow 2\lambda > 3 - 2\lambda \Leftrightarrow 4\lambda > 3 \Leftrightarrow \lambda > \frac{3}{4}$$

Se $\lambda > \frac{3}{4}$ então $MR_2: \mu=1$

Se $\lambda = \frac{3}{4}$ então qualquer valor de μ é uma MR_2

Se $\lambda < \frac{3}{4}$ então $MR_2: \mu=0$

		2	
		<i>b</i>	<i>s</i>
1	<i>B</i>	$3 + \epsilon, 2$	$1 + \epsilon, 1$
	<i>S</i>	$0, 0$	$2, 3$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo: *Batalha dos Sexos Assimétrico*

Se $\mu > \frac{1-\epsilon}{4}$ então $MR_1: \lambda=1$

Se $\mu = \frac{1-\epsilon}{4}$ então qualquer valor de λ é uma MR_1

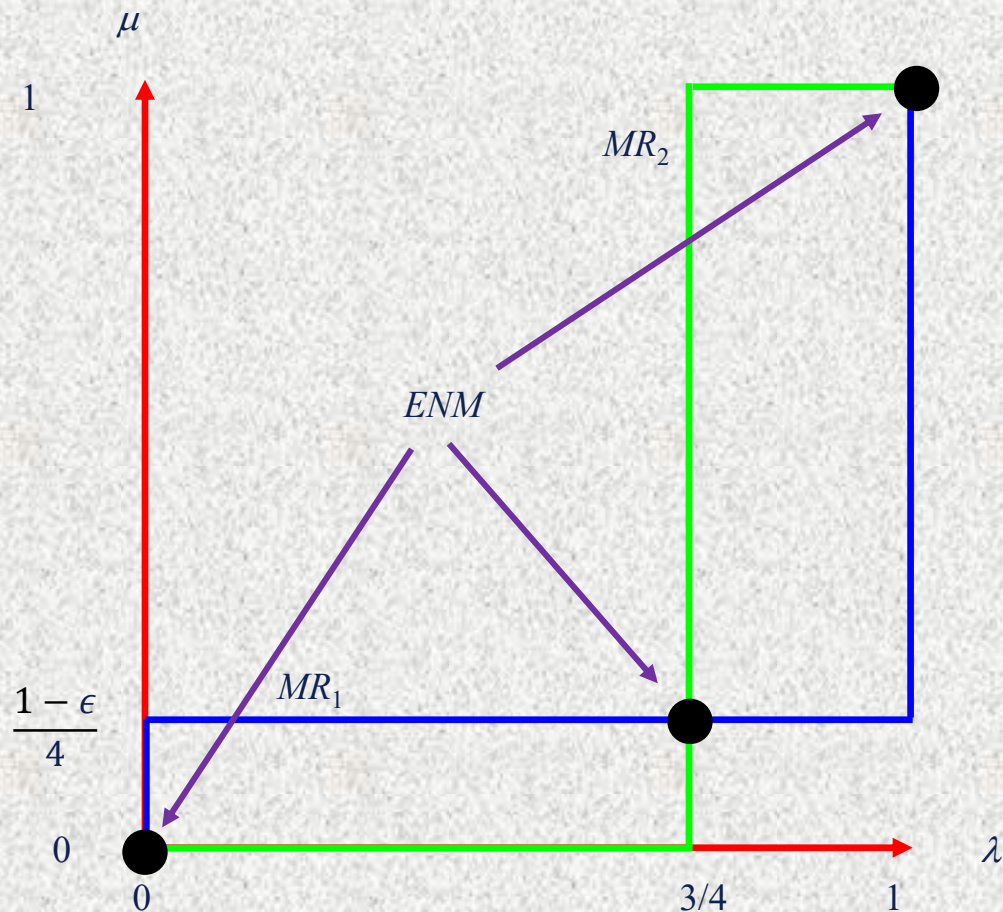
Se $\mu < \frac{1-\epsilon}{4}$ então $MR_1: \lambda=0$

Se $\lambda > \frac{3}{4}$ então $MR_2: \mu=1$

Se $\lambda = \frac{3}{4}$ então qualquer valor de μ é uma MR_2

Se $\lambda < \frac{3}{4}$ então $MR_2: \mu=0$

		2	
		<i>b</i>	<i>s</i>
1	<i>B</i>	$3 + \epsilon, 2$	$1 + \epsilon, 1$
	<i>S</i>	$0, 0$	$2, 3$



Soluções:

EN: $(B, b), (S, s)$

ENM: $\left(\frac{3}{4}B + \frac{1}{4}S, \frac{1-\epsilon}{4}b + \frac{3+\epsilon}{4}s\right)$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- Batalha dos Sexos Assimétrico $0 < \epsilon < 1$

Soluções:

$$\text{EN: } (B, b), (S, s); \quad \text{ENM: } \left(\frac{3}{4}B + \frac{1}{4}S, \frac{1-\epsilon}{4}b + \frac{3+\epsilon}{4}s \right)$$

Note:

Se $\epsilon = 0$, então ENM simétrico:

$$\left(\frac{3}{4}B + \frac{1}{4}S, \frac{1}{4}b + \frac{3}{4}s \right)$$

Cada um apresenta o mesmo viés na direção preferida. Probabilidade de não se encontrarem:

$$\left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{10}{16} = 0,625$$

Se $0 < \epsilon < 1$, então:

Há um viés de preferência por parte de 1

Que gera um viés de radicalização na estratégia de 2:

O jogador 2 vai ao lugar preferido pelo 1 com probabilidade ainda menor!

Para que 2 consiga "disciplinar" 1!!

Probabilidade de não se encontrarem:

$$\frac{3(3+\epsilon)}{4^2} + \frac{1-\epsilon}{4^2} = \frac{10}{16} + \frac{\epsilon}{8} = 0,625 + \frac{\epsilon}{2}$$

Discussão:

ENM como mecanismo para disciplinar o outro jogador

Radicalismo estratégico

Aumenta a probabilidade de desencontro!

		2	
		<i>b</i>	<i>s</i>
1	<i>B</i>	$3 + \epsilon, 2$	$1 + \epsilon, 1$
	<i>S</i>	$0, 0$	$2, 3$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Observações:

- Todo EN em estratégias puras é um ENM
- *EIED?*

		2		
		t_1	t_2	t_3
1	s_1	14, 12	18, 2	12, 6
	s_2	10, 2	16, 12	16, 6

$$\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 > t_3$$

No jogo resultante, $s_1 > s_2$

No jogo resultante, $t_1 > t_2$

Portanto, o único EN encontrado por EIED é (s_1, s_2)

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Observações:

- ENM

		2		
		A	B	C
1	a	-1, 1	2, -2	5, 0
	b	0, 3	1, 2	4, 3
	c	2, -2	-1, 1	6, -3
	d	2, 2	1, 3	4, 1

$$a \succ_1 d$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \succ_1 b$$

No jogo resultante, $A \succ_2 C$

No jogo resultante, Portanto, o jogo foi reduzido a um jogo 2x2

O único EN desse jogo é $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Proposição. Caracterização de Equilíbrios de Nash em estratégias mistas.

Seja $J = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo finito na forma normal.

Então são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) σ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

(ii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,

$$\text{Se } \sigma_i(s_i) > 0 \text{ então } Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$$

$$\text{Se } \sigma_i(s_i) = 0 \text{ então } Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$$

(iii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,

$$Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$$

Demonstração: Mostremos que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Proposição. Caracterização de Equilíbrios de Nash em estratégias mistas.

Seja $J = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo finito na forma normal.

Então são equivalentes as seguintes afirmações:

- (i) σ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.
- (ii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,
Se $\sigma_i(s_i) > 0$ então $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$
Se $\sigma_i(s_i) = 0$ então $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$
- (iii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,
 $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$

Demonstração: Mostremos que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por definição, $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i}), \forall s_i \in S_i$

Portanto, resta apenas provar que se $\sigma_i(s_i) > 0$, não podemos ter desigualdade estrita

Suponha, por absurdo, que $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$ para algum s_i tal que $\sigma_i(s_i) > 0$

Então necessariamente haveria $s'_i \in S_i$ tal que: $\sigma_i(s'_i) > 0$ e $Eu_i(s'_i, \sigma_{-i}) > Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$

Mas então defina a estratégia mista σ'_i por:

$\sigma'_i(s_i) = 0$; $\sigma'_i(s'_i) = \sigma_i(s_i) + \sigma_i(s'_i)$; $\sigma'_i(s''_i) = \sigma_i(s''_i), \forall s''_i \neq s_i, s'_i$

satisfaz:

$$Eu_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Contradição

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Resposta 5: ENM

Proposição. Caracterização de Equilíbrios de Nash em estratégias mistas.

Seja $J = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo finito na forma normal. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

- (i) σ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.
- (ii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,
Se $\sigma_i(s_i) > 0$ então $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$
Se $\sigma_i(s_i) = 0$ então $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$
- (iii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,
 $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$

Demonstração: Mostremos que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii): OK

(ii) $\Rightarrow$ (iii): imediato

(iii) $\Rightarrow$ (i): imediato

Observação. Em particular, para todos $s_i, s'_i \in S_i, \sigma$ ENM,

se $\sigma_i(s_i)\sigma_i(s'_i) > 0$ então $Eu_i(s_i, \sigma_{-i}) = Eu_i(s'_i, \sigma_{-i})$

Apresentação

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

Capítulo 2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal

2.1.2. Solução por Dominância

2.1.3. Equilíbrio de Nash

2.2. Aplicações

2.2.1. Oligopólio de Cournot

2.2.2. Duopólio de Bertrand

2.2.3. Negociação com arbitragem

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

2.3.3. Exercícios extras

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Definição: Seja $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo finito na forma normal com $|N| = n$.

A partir de $\mathcal{J}$, pode-se definir o jogo $\Delta\mathcal{J} = (N; \Delta S_i; Eu_i, i = 1, \dots, n)$, em que:

ΔS_i é o conjunto de todas as distribuições de probabilidades sobre o conjunto S_i

Portanto, uma estratégia mista do jogo $\mathcal{J}$ nada mais é que uma estratégia pura do jogo $\Delta\mathcal{J}$.

Equilíbrio de Nash para estratégias mistas:

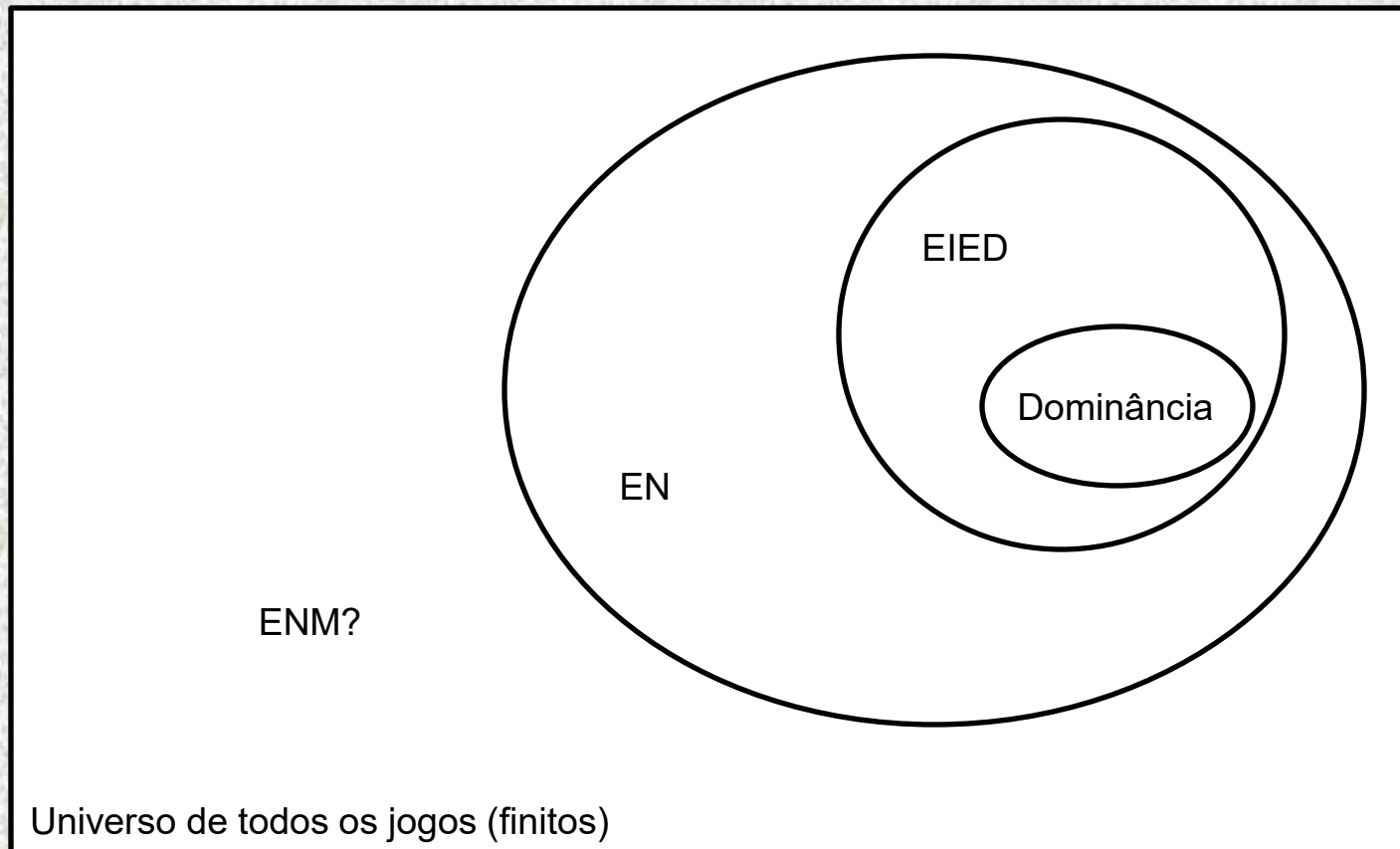
Um perfil de estratégias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*) \in \Delta S_1 \times \dots \times \Delta S_n$ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas (ENM) se e somente se, para cada jogador i ,

$$Eu_i(\sigma^*) = Eu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \quad \forall \sigma_i \in \Delta S_i$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Diagrama de Venn



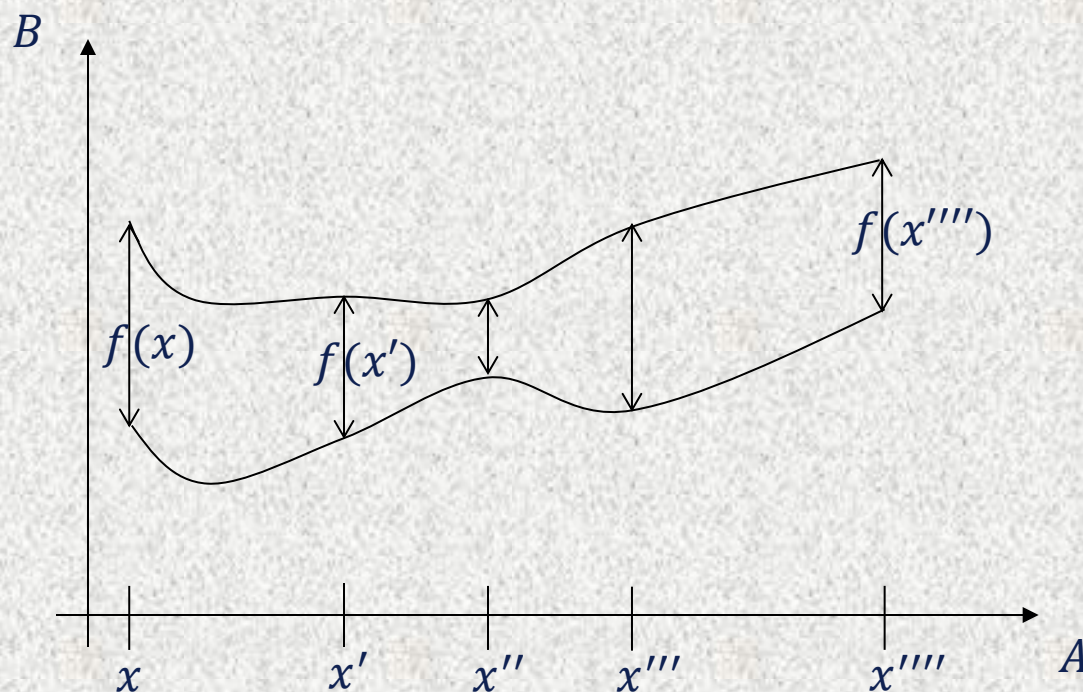
2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Definição-Sejam $A, B \subseteq R^k$ e seja $\wp(B) = 2^B$ o conjunto dos subconjuntos de B .

- (i) Uma aplicação $f: A \rightarrow \wp(B)$ é chamada uma *correspondência* de A em B .
- (ii) O *gráfico* da correspondência f é dado pelo conjunto:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in f(x)\}$$



2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

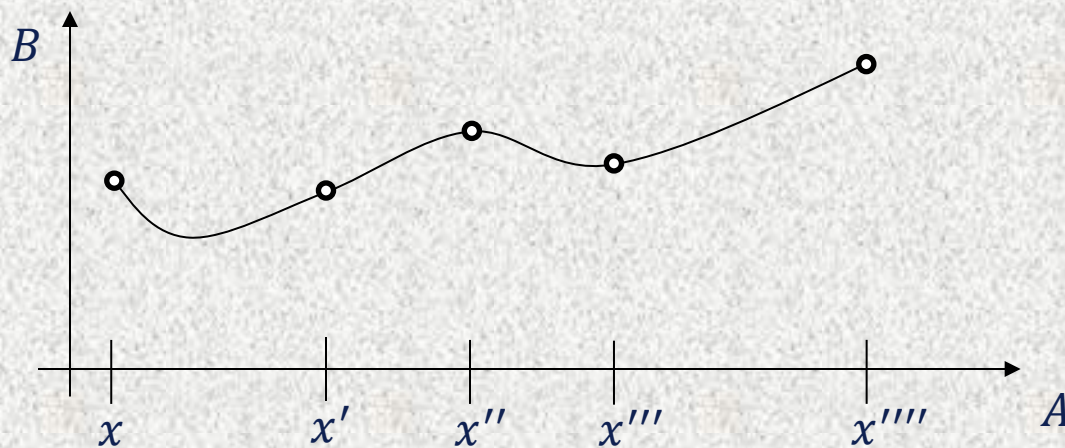
2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Definição-Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ e seja $\wp(B) = 2^B$ o conjunto dos subconjuntos de B .

- (i) Uma aplicação $f: A \rightarrow \wp(B)$ é chamada uma *correspondência* de A em B .
- (ii) O *gráfico* da correspondência f é dado pelo conjunto:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in f(x)\}$$

Exemplo-Toda função $g: A \rightarrow B$ pode ser vista como um caso particular de uma correspondência de A em B , f_g , definida por $f_g(a) = \{g(a)\}$.



2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Definição-Sejam $A, B \subseteq R^k$ e seja $\wp(B) = 2^B$ o conjunto dos subconjuntos de B .

(i) Uma aplicação $f: A \rightarrow \wp(B)$ é chamada uma *correspondência* de A em B .

(ii) O *gráfico* da correspondência f é dado pelo conjunto:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in f(x)\}.$$

(iii) O gráfico de f é dito *fechado* se:

Quaisquer que sejam as sequências $\{a^n\}$ em A e $\{b^n\}$ em B , tais que:

$$\forall n, \quad b^n \in f(a^n),$$

se a^n converge para a e b^n converge para b ,

então $a \in A$ e $b \in f(a)$.

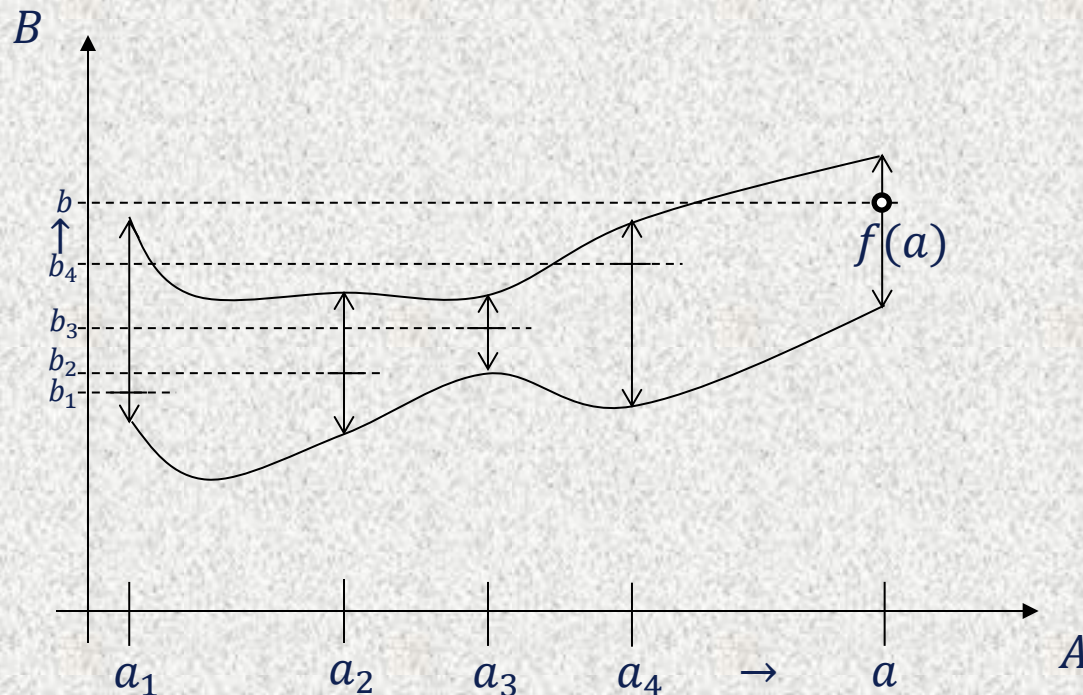
2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Definição-Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ e seja $\wp(B) = 2^B$ o conjunto dos subconjuntos de B .

(iii) O gráfico de f é dito *fechado* se quaisquer que sejam as sequências $\{a^n\}$ em A e $\{b^n\}$ em B , tais que $\forall n, b^n \in f(a^n)$,

se a^n converge para a e b^n converge para b , então $a \in A$ e $b \in f(a)$.



Definição-Sejam $A, B \subseteq R^k$ e seja $\wp(B) = 2^B$ o conjunto dos subconjuntos de B .

(i) Uma aplicação $f: A \rightarrow \wp(B)$ é chamada uma *correspondência* de A em B .

(ii) O *gráfico* da correspondência f é dado pelo conjunto:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in f(x)\}.$$

(iii) O gráfico de f é dito *fechado* se quaisquer que sejam as sequências

$\{a^n\}$ em A e $\{b^n\}$ em B , tais que $\forall n, b^n \in f(a^n)$,

se a^n converge para a e b^n converge para b , então $a \in A$ e $b \in f(a)$.

Exemplo-Toda função $g: A \rightarrow B$ pode ser vista como um caso particular de uma correspondência de A em B , f_g , definida por $f_g(a) = \{g(a)\}$.

Nesse caso, o gráfico de f_g é fechado se e somente se:

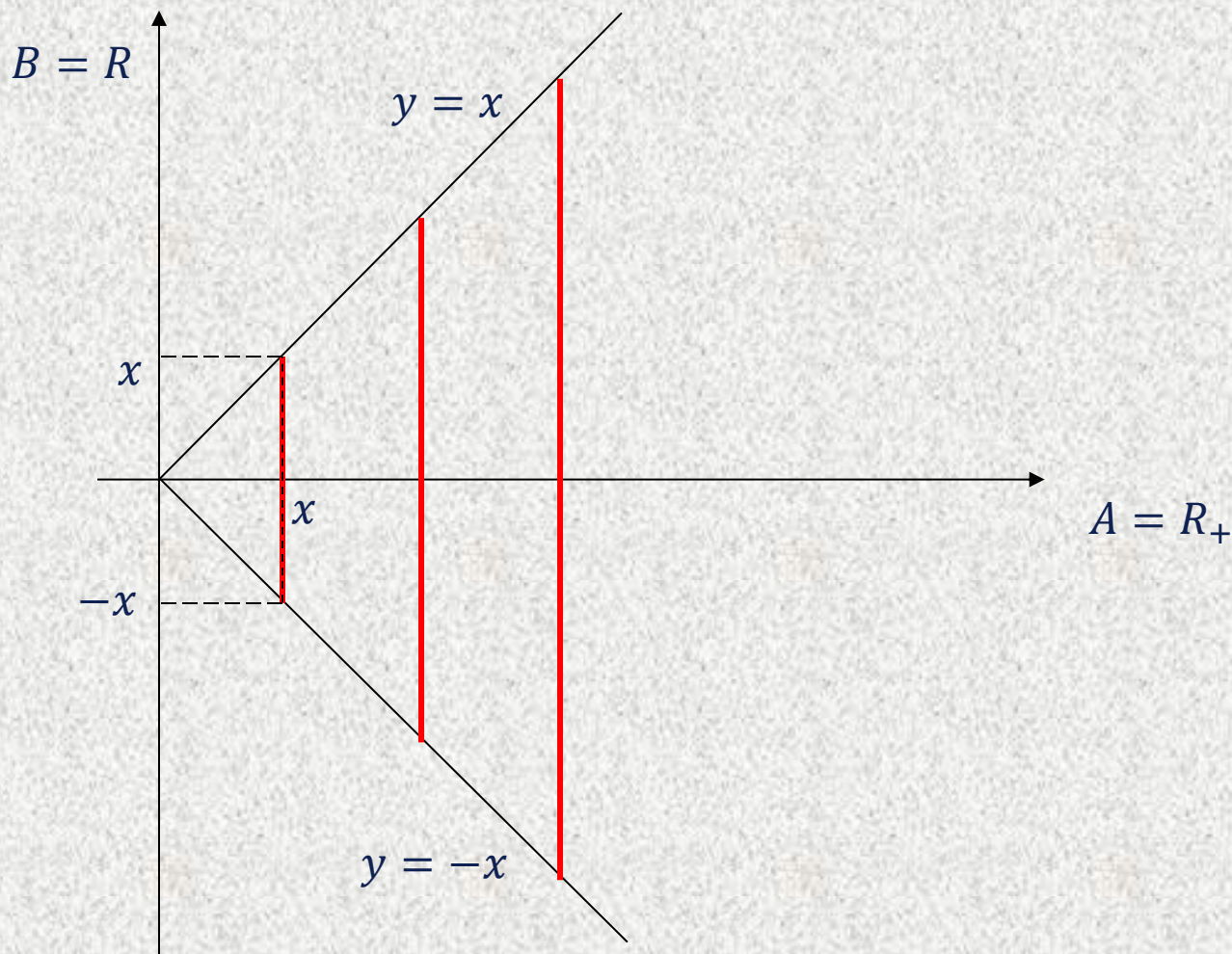
A é um subconjunto fechado de R^k e g é contínua.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Exemplo- $f(x)=2x$.

Exemplo- Seja $f: R_+ \rightarrow \wp(R)$ definida por $f(x)=[-x, x]$. Então o gráfico de f é fechado e pode ser representado pela figura abaixo.

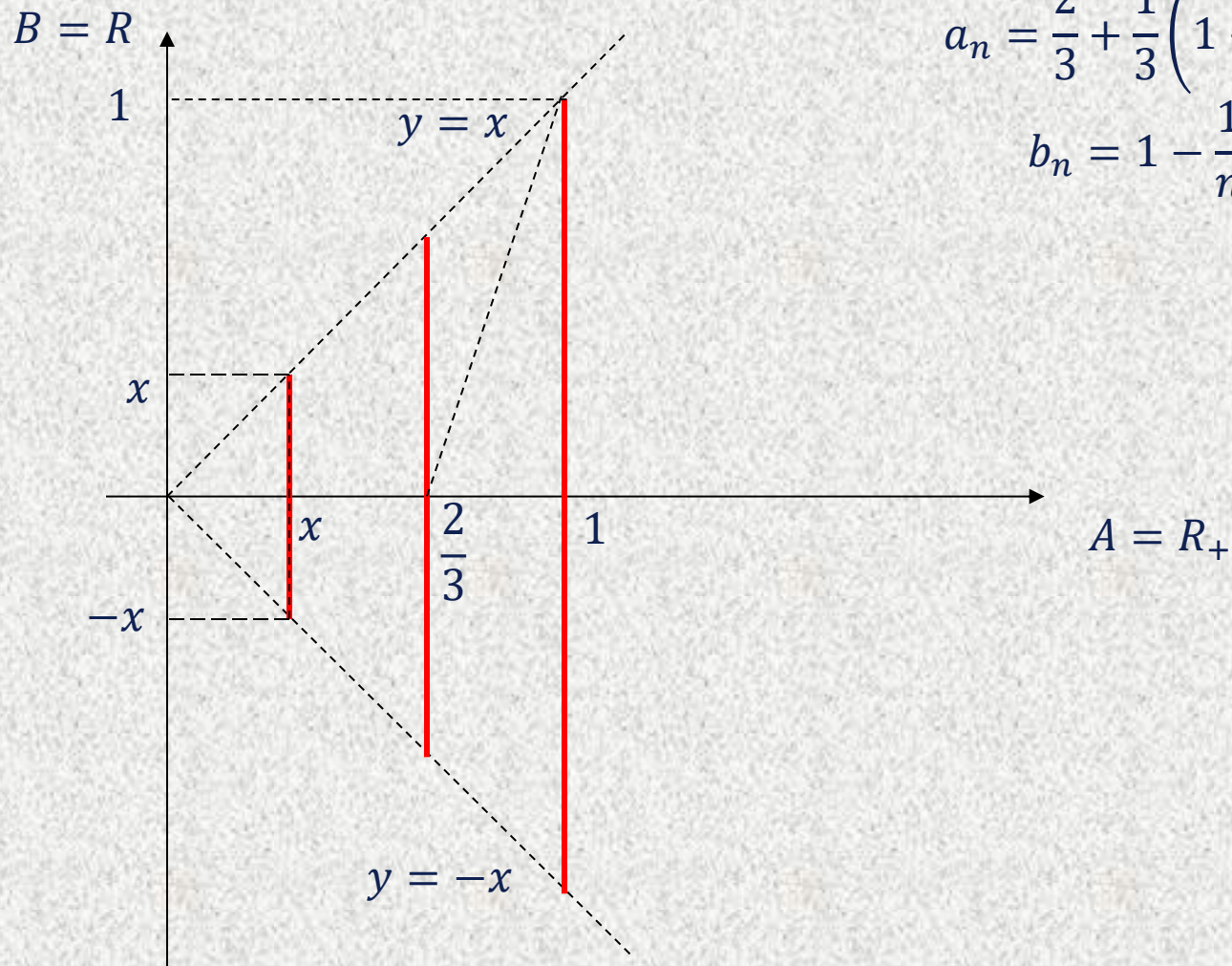


2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Exemplo- $f(x)=2x$.

Exemplo- Seja $f: R_+ \rightarrow \wp(R)$ definida por $f(x)=(-x, x)$, então o gráfico de f não é mais fechado.



$$a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$
$$b_n = 1 - \frac{1}{n}$$

Exemplo- Considere um consumidor que possui uma renda I a ser usada na aquisição dos bens $1, 2, \dots, m$.

Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in R_+^m$ uma cesta genérica desses bens.

Se $p = (p_1, \dots, p_m) \in R_{++}^m$ for o vetor de preços de mercado dos bens na economia, então pode-se definir:

$$B(p) = \{x \in R_+^m \mid p \cdot x \leq I\}$$

O conjunto $B(p)$ é chamado conjunto orçamentário associado ao vetor de preços p e representa todas as cestas que o consumidor pode comprar, dada sua renda, se os preços de mercado forem dados por p .

Assim, B define uma correspondência de R_{++}^m em R_+^m , que é chamada de *correspondência orçamentária*.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Exemplo-Considere um consumidor que possui uma renda I a ser usada na aquisição dos bens $1, 2, \dots, m$. Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in R_+^m$ uma cesta genérica desses bens. Se $p = (p_1, \dots, p_m) \in R_{++}^m$ for o vetor de preços de mercado dos bens na economia, então $B(p) = \{x \in R_+^m \mid p \cdot x \leq I\}$

$B(p)$ é o conjunto orçamentário e B define uma correspondência de R_{++}^m em R_+^m , que é chamada de *correspondência orçamentária*.

Por exemplo, se $m = 1$ e $p > 0$, então:

$$B(p) = \left[0, \frac{I}{p}\right] \text{ e } B: \begin{cases} R_{++} \rightarrow \wp(R_{++}) \\ p \mapsto \left[0, \frac{I}{p}\right] \end{cases}$$

Denote por $\Delta \left[0, \frac{I}{p}\right]$ o intervalo em R determinado pelos pontos 0 e $\frac{I}{p}$

então,

$$B: \begin{cases} R_{++} \rightarrow \wp(R_{++}) \\ p \mapsto \Delta \left[0, \frac{I}{p}\right] \end{cases}$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Exemplo-Considere um consumidor que possui uma renda I a ser usada na aquisição dos bens $1, 2, \dots, m$. Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in R_+^m$ uma cesta genérica desses bens. Se $p = (p_1, \dots, p_m) \in R_{++}^m$ for o vetor de preços de mercado dos bens na economia, então $B(p) = \{x \in R_+^m \mid p \cdot x \leq I\}$

Por exemplo, se $m = 1$ e $p > 0$, $B: \begin{cases} R_{++} \rightarrow \wp(R_{++}) \\ p \mapsto \Delta\left[0, \frac{I}{p}\right] \end{cases}$

Se $m = 2$, e $p_1, p_2 > 0$, então $B(p_1, p_2) = \{x = (x_1, x_2) \mid p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I\}$, que é o triângulo em R^2 determinado pelos pontos $(0,0)$, $\left(0, \frac{I}{p_1}\right)$, $\left(\frac{I}{p_2}, 0\right)$.

Denote esse triângulo em R^2 por $\Delta\left[(0,0), \left(0, \frac{I}{p_1}\right), \left(\frac{I}{p_2}, 0\right)\right]$

Então,

$$B: \begin{cases} R_{++}^2 \rightarrow \wp(R_{++}^2) \\ p \mapsto \Delta\left[(0,0), \left(0, \frac{I}{p_1}\right), \left(\frac{I}{p_2}, 0\right)\right] \end{cases}$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Exemplo-Considere um consumidor que possui uma renda I a ser usada na aquisição dos bens $1, 2, \dots, m$. Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in R_+^m$ uma cesta genérica desses bens. Se $p = (p_1, \dots, p_m) \in R_{++}^m$ for o vetor de preços de mercado dos bens na economia, então $B(p) = \{x \in R_+^m \mid p \cdot x \leq I\}$

$$B: \begin{cases} R_{++} \rightarrow \wp(R_{++}) \\ p \mapsto \Delta \left[0, \frac{1}{p} \right] \end{cases} \qquad B: \begin{cases} R_{++}^2 \rightarrow \wp(R_{++}^2) \\ p \mapsto \Delta \left[(0,0), \left(0, \frac{I}{p_1}\right), \left(\frac{1}{p_2}, 0\right) \right] \end{cases}$$

Se $m = 3$, e $p_1, p_2, p_3 > 0$, então

$$B(p_1, p_2, p_3) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 \leq I\}$$

Denote por $\Delta \left[(0,0,0), \left(\frac{I}{p_1}, 0,0\right), \left(0, \frac{I}{p_2}, 0\right), \left(0,0, \frac{I}{p_3}\right) \right]$ a pirâmide triangular em R^3 determinada pelos quatro pontos acima.

Então,

$$B: \begin{cases} R_{++}^3 \rightarrow \wp(R_{++}^3) \\ p \mapsto \Delta \left[(0,0,0), \left(\frac{I}{p_1}, 0,0\right), \left(0, \frac{I}{p_2}, 0\right), \left(0,0, \frac{I}{p_3}\right) \right] \end{cases}$$

Teorema (lema)-Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo e compacto e seja $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência. Suponha que:

- (i) Para todo $a \in A$, $f(a)$ é um subconjunto não-vazio e convexo de A .
- (ii) O gráfico de f é fechado.

Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$.

O ponto z é chamado um *ponto fixo* da correspondência f .

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

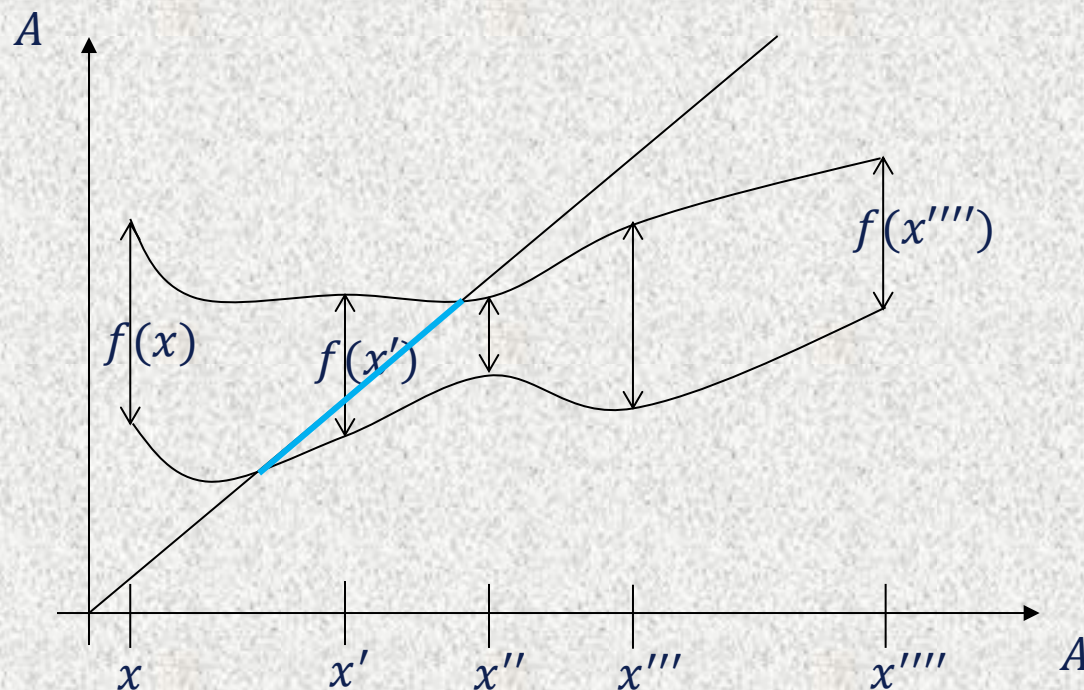
Teorema (lema)-Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo e compacto e seja $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência. Suponha que:

(i) Para todo $a \in A$, $f(a)$ é um subconjunto não-vazio e convexo de A .

(ii) O gráfico de f é fechado.

Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$. O ponto z é um *ponto fixo* da correspondência f .



2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Teorema (lema)-Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

Quadro

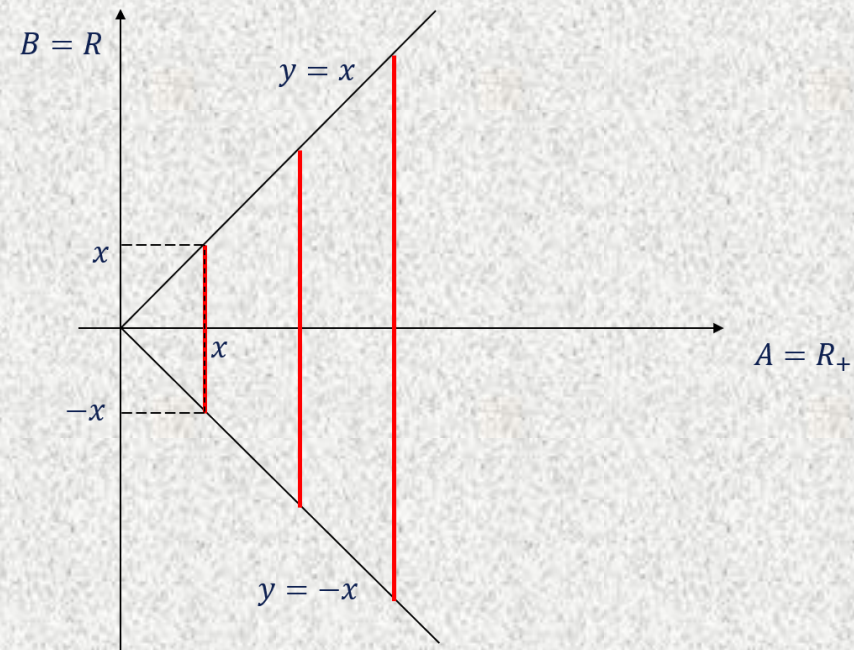
Observação-Em geral, um ponto $z \in A$ é chamado um ponto fixo de uma correspondência $A \rightarrow \wp(A)$ se $z \in f(z)$

Exemplo-No exemplo anterior, $f(x) = [-x, x]$.

Todo ponto $x \in R_+$ é um ponto fixo de f .

E se $f(x) = [-x/2, x/2]$?

E se $f(x) = [x-1, 1-x]$, $x \in [0, 1]$?



Teorema (lema)-Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

Quadro

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo e compacto e seja $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência. Suponha que:

- (i) Para todo $a \in A$, $f(a)$ é um subconjunto não-vazio e convexo de A .
- (ii) O gráfico de f é fechado.

Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$.

O ponto z é chamado um *ponto fixo* da correspondência f .

Exemplo-No caso particular em que f é uma função, um ponto fixo é um ponto $z \in A$ tal que $f(z) = z$.

Se $A = [a, b]$ e $f: A \rightarrow A$, então o conhecido Teorema do Valor Intermediário pode ser visto como um caso particular do Teorema de Kakutani.

Aparte: Concavidade e quase-concavidade.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio e convexo e seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

(i) f é côncava se: $\forall x, y \in A, \forall \alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y)$$

(ii) f é quase-côncava se: $\forall x, y \in A$, se $f(x) \geq f(y)$ então, $\forall \alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq f(y)$$

Aparte: Concavidade e quase-concavidade.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio e convexo e seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- (i) f é côncava se: $\forall x, y \in A, \forall \alpha \in [0,1], f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$
- (ii) f é quase-côncava se: $\forall x, y \in A$, se $f(x) \geq f(y)$ então, $\forall \alpha \in [0,1], f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq f(y)$

Observação: Toda função côncava é, naturalmente, quase-côncava, mas a volta não é verdadeira.

Por exemplo, toda função monotônica é quase-côncava, mas uma função estritamente convexa estritamente crescente não é côncava: $A = \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$

Portanto, o conceito de quase-concavidade é menos demandante/exigente que o conceito de concavidade.

Aparte: Concavidade e quase-concavidade.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio e convexo e seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- (i) f é côncava se: $\forall x, y \in A, \forall \alpha \in [0, 1], f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$
- (ii) f é quase-côncava se: $\forall x, y \in A$, se $f(x) \geq f(y)$ então, $\forall \alpha \in [0, 1], f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq f(y)$

Exemplo-Toda função linear é côncava e quase-côncava, mas não é estritamente côncava. Outros exemplos no quadro.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Aparte: Concavidade e quase-concavidade.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio e convexo e seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- (i) f é côncava se: $\forall x, y \in A, \forall \alpha \in [0, 1], f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$
- (ii) f é quase-côncava se: $\forall x, y \in A$, se $f(x) \geq f(y)$ então, $\forall \alpha \in [0, 1], f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq f(y)$

Exemplo-Utilidade esperada.

2

		s_{21}	s_{22}
1	s_{11}	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}
	s_{12}	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}

$$\left((\sigma_1(s_{11}), \sigma_1(s_{12})), (\sigma_2(s_{21}), \sigma_2(s_{22})) \right)$$

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1(s_{11})\sigma_2(s_{21})a_{11} + \sigma_1(s_{11})\sigma_2(s_{22})a_{12} + \sigma_1(s_{12})\sigma_2(s_{21})a_{21} + \sigma_1(s_{12})\sigma_2(s_{22})a_{22}$$

$$u_1(\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma'_1, \sigma_2) =$$

$$(\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma'_1)(s_{11})\sigma_2(s_{21})a_{11} + (\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma'_1)(s_{11})\sigma_2(s_{22})a_{12}$$

$$+ (\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma'_1)(s_{12})\sigma_2(s_{21})a_{21} + (\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma'_1)(s_{12})\sigma_2(s_{22})a_{22} =$$

$$\alpha(\sigma_1(s_{11})\sigma_2(s_{21})a_{11} + \sigma_1(s_{11})\sigma_2(s_{22})a_{12} + \sigma_1(s_{12})\sigma_2(s_{21})a_{21} + \sigma_1(s_{12})\sigma_2(s_{22})a_{22}) +$$

$$(1 - \alpha)(\sigma'_1(s_{11})\sigma_2(s_{21})a_{11} + \sigma'_1(s_{11})\sigma_2(s_{22})a_{12} + \sigma'_1(s_{12})\sigma_2(s_{21})a_{21} + \sigma'_1(s_{12})\sigma_2(s_{22})a_{22})$$

$$= \alpha u_1(\sigma_1, \sigma_2) + (1 - \alpha)u_1(\sigma'_1, \sigma_2)$$

Kakutani. $A \subseteq R^n$ não vazio, convexo, compacto; e $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência.

(i) Para todo $a \in A$, $f(a) \subseteq A$ não-vazio e convexo.

(ii) O gráfico de f é fechado.

Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$.

éguas mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Teorema (Lema)-Existência de Equilíbrio de Nash.

Seja $J = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal tal que:

(i) Para todo jogador i , S_i é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de algum espaço euclidiano (subespaço vetorial de R^n).

(ii) Para todo jogador i , u_i é uma função contínua em $s = (s_1, \dots, s_n)$ e quase-côncava em S_i .

Então existe pelo menos um equilíbrio de Nash no jogo J .

Demonstração. Defina, para cada $i=1, \dots, n$, a correspondência *melhor resposta*:

$$MR_i: S_{-i} \rightarrow \wp(S_i)$$

$$s_{-i} \mapsto MR_i(s_{-i}) = \operatorname{argmax}_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) = \{s_i \in S_i \mid u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(r, s_{-i}), \forall r \in S_i\}.$$

Então:

(i) $MR_i(s_{-i})$ é não-vazio.

Como S_i é compacto e u_i é contínua em s_i , então para todo $s_{-i} \in S_{-i}$, $MR_i(s_{-i})$ é não-vazio.

Kakutani. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo, compacto; e $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência.

(i) Para todo $a \in A$, $f(a) \subseteq A$ não-vazio e convexo.

(ii) O gráfico de f é fechado.

Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$.

éguas mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Teorema (Lema)-Existência de Equilíbrio de Nash.

Seja $J = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal tal que:

(i) Para todo jogador i , S_i é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de algum espaço euclidiano.

(ii) Para todo jogador i , u_i é uma função contínua em $s = (s_1, \dots, s_n)$ e quase-côncava em s_i .

Então existe pelo menos um equilíbrio de Nash no jogo J .

Demonstração. Defina, para cada $i=1, \dots, n$, a correspondência *melhor resposta*:

$$MR_i: S_{-i} \rightarrow \wp(S_i)$$

$$s_{-i} \mapsto MR_i(s_{-i}) = \operatorname{argmax}_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) = \{s_i \in S_i \mid u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(r, s_{-i}), \forall r \in S_i\}.$$

Então:

(i) $MR_i(s_{-i})$ é não-vazio.

(ii) $MR_i(s_{-i})$ é um conjunto convexo.

Como u_i é quase-côncava em s_i , $\forall s_i, s'_i \in S_i$, $\forall \alpha \in [0, 1]$,

$$s_i, s'_i \in MR_i(s_{-i}) \Rightarrow u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \Rightarrow u_i(\alpha s_i + (1-\alpha)s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \Rightarrow \alpha s_i + (1-\alpha)s'_i \in MR_i(s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}. \text{ Assim, } MR_i(s_{-i}) \text{ é um conjunto convexo.}$$

Kakutani. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo, compacto; e $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência. **Existas e existência de Equilíbrio de Nash**

(i) Para todo $a \in A$, $f(a) \subseteq A$ não-vazio e convexo.

(ii) O gráfico de f é fechado. Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$.

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Teorema (Lema)-Existência de Equilíbrio de Nash.

Seja $J = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal tal que:

(i) Para todo jogador i , S_i é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de algum espaço euclidiano.

(ii) Para todo jogador i , u_i é uma função contínua em $s = (s_1, \dots, s_n)$ e quase-côncava em s_i .

Então existe pelo menos um equilíbrio de Nash no jogo J .

Demonstração. Defina, para cada $i=1, \dots, n$, a correspondência *melhor resposta*:

$$MR_i: S_{-i} \rightarrow \wp(S_i) \quad s_{-i} \mapsto MR_i(s_{-i}) = \arg\max u_i(s_i, s_{-i}) = \{s_i \in S_i \mid u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(r, s_{-i}), \forall r \in S_i\}.$$

(i) $MR_i(s_{-i})$ é não-vazio. (ii) $MR_i(s_{-i})$ é um conjunto convexo.

(iii) O gráfico de MR_i é fechado.

Seja $s_{-i,k}$ uma sequência em S_{-i} e, para cada k , seja $s_{i,k} \in MR_i(s_{-i,k})$, tais que $s_{-i,k} \rightarrow s_{-i}$ e $s_{i,k} \rightarrow s_i$.

Como S_i e S_{-i} são conjuntos compactos $s_i \in S_i$ e $s_{-i} \in S_{-i}$.

Além disso, por construção, para cada k , $u_i(s_{i,k}, s_{-i,k}) \geq u_i(s'_i, s_{-i,k}), \forall s'_i \in S_i$.

Como u_i é contínua em S , tomando o limite quando $k \rightarrow +\infty$ temos:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}), \forall s'_i \in S_i \Rightarrow s_i \in MR_i(s_{-i}).$$

Logo, o gráfico de MR_i é fechado.

Kakutani. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo, compacto; e $f: A \rightarrow \wp(A)$ uma correspondência.

(i) Para todo $a \in A$, $f(a) \subseteq A$ não-vazio e convexo.

(ii) O gráfico de f é fechado.

Então existe $z \in A$ tal que $z \in f(z)$.

Teorema (Lema)-Existência de Equilíbrio de Nash.

Seja $J = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal tal que:

(i) Para todo jogador i , S_i é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de algum espaço euclidiano.

(ii) Para todo jogador i , u_i é uma função contínua em $s = (s_1, \dots, s_n)$ e quase-côncava em s_i .

Demonstração. $MR_i: S_{-i} \rightarrow \wp(S_i)$

$$s_{-i} \mapsto MR_i(s_{-i})$$

(iv) Defina agora $MR: S \rightarrow \wp(S)$ por $MR(s) = MR_1(s_{-1}) \times \dots \times MR_n(s_{-n})$.

Então, MR satisfaz as condições do teorema de Kakutani.

Assim, existe $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ tal que $s_i \in MR(s_{-i})$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Logo s é um equilíbrio de Nash do jogo.

Teorema (Lema)-Existência de Equilíbrio de Nash.

Seja $J=(n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal tal que:

- (i) Para todo jogador i , S_i é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de algum espaço euclidiano.
- (ii) Para todo jogador i , u_i é uma função contínua em $s=(s_1, \dots, s_n)$ e quase-côncava em s_i .

Então existe pelo menos um equilíbrio de Nash no jogo J .

Exemplos.

Cournot, Bertrand com produtos não homogêneos

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Teorema (Lema)-Existência de Equilíbrio de Nash.

Seja $J=(n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal tal que:

- (i) Para todo jogador i , S_i é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de algum espaço euclidiano.
- (ii) Para todo jogador i , u_i é uma função contínua em $s=(s_1, \dots, s_n)$ e quase-côncava em s_i .

Então existe pelo menos um equilíbrio de Nash no jogo J .

Teorema-Existência de Equilíbrio de Nash (Nash 1950).

Seja $J=(n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal onde cada jogador possui um número finito de estratégias.

Então J possui pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Demonstração. Basta considerar o jogo associado $\Delta J=(n; \Delta S_1, \dots, \Delta S_n; Eu_1, \dots, Eu_n)$ e observar que:

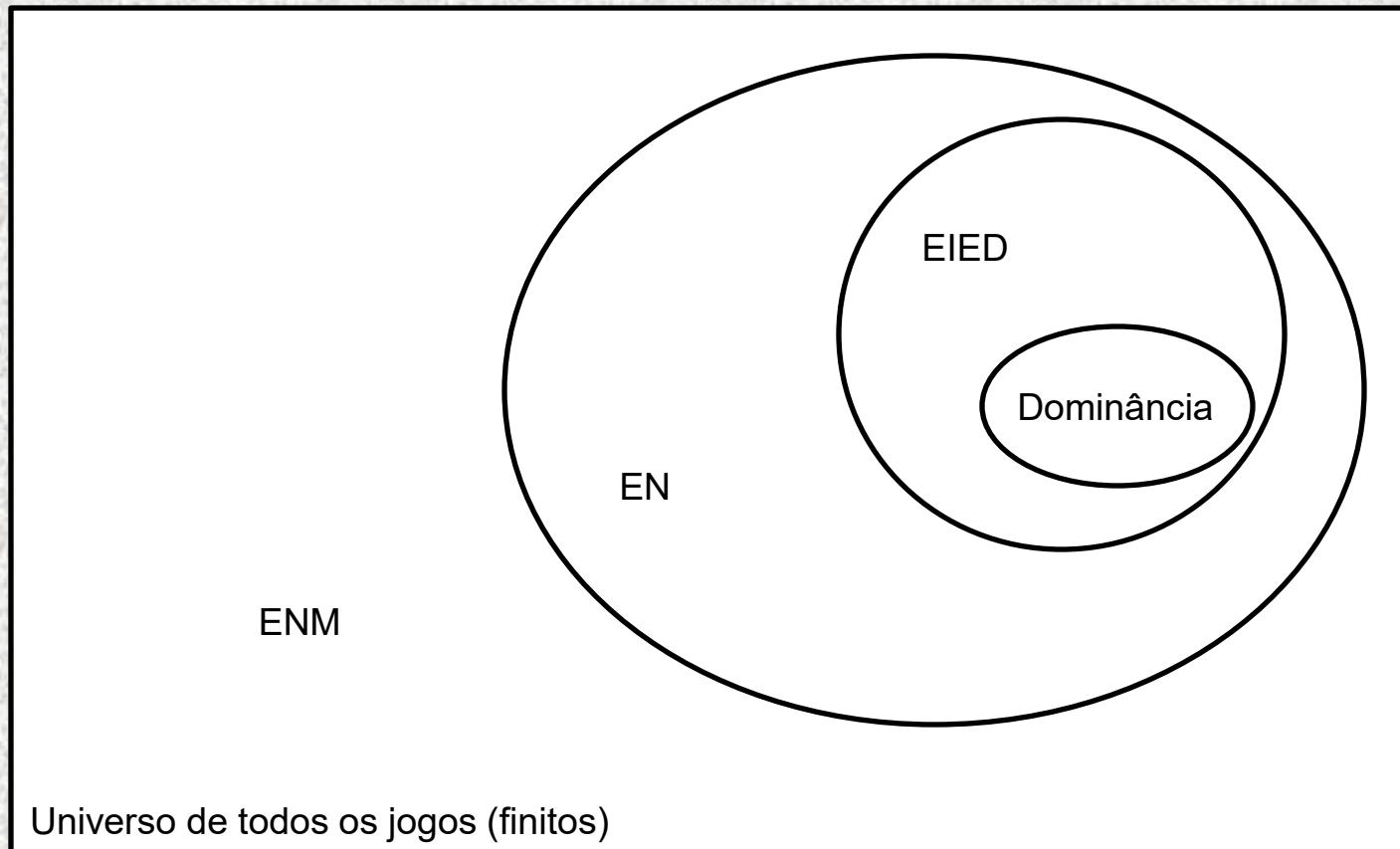
os simplexes ΔS_i satisfazem as condições (i) do teorema anterior

e as funções de utilidade esperada Eu_i são lineares, e portanto contínuas e quase-côncavas, em seus argumentos.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Diagrama de Venn



Observação.

Em geral, número ímpar de $EM(M)$, exceto em casos degenerados (de medida zero).

Wilson, Robert. 1971. "Computing Equilibria of N-Person Games." *SIAM Journal on Applied Mathematics* 21 (1): 80–87.

Harsanyi, John C. 1973. "Oddness of the Number of Equilibrium Points: A New Proof." *International Journal of Game Theory* 2: 235–250

Nash, John F. "Non-Cooperative Games." *Annals of Mathematics* 54, no. 2 (1951): 286–295.

Nash, John F. "Equilibrium Points in n-Person Games." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, no. 1 (1950): 48–49.

Nash, John F. "The Bargaining Problem." *Econometrica* 18, no. 2 (1950): 155–162.

