

Teoria dos Jogos

Prof. Maurício Bugarin

Eco/UnB

EPRG-Economics and Politics Research Group

Jogos estáticos com informação completa

Parte 3

Apresentação

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

Capítulo 2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal

2.1.2. Solução por Dominância

2.1.3. Equilíbrio de Nash

2.2. Aplicações

2.2.1. Oligopólio de Cournot

2.2.2. Duopólio de Bertrand

2.2.3. Arbitragem de ofertas finais

Definição- *Equilíbrio de Nash*

Seja $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo na forma normal.

Um perfil de estratégias $s^* = (s_i^*)_{i \in N}$ é chamado um *equilíbrio de Nash (EN)* se para cada jogador $i = 1, \dots, n$, dadas as escolhas dos demais jogadores (s_{-i}^*) ,

o melhor que i pode fazer é escolher s_i^* :

$$\forall i \in N, \forall s'_i \in S_i, u_i(s^*) \geq u_i(s'_i, s_{-i}^*)$$

Observação:

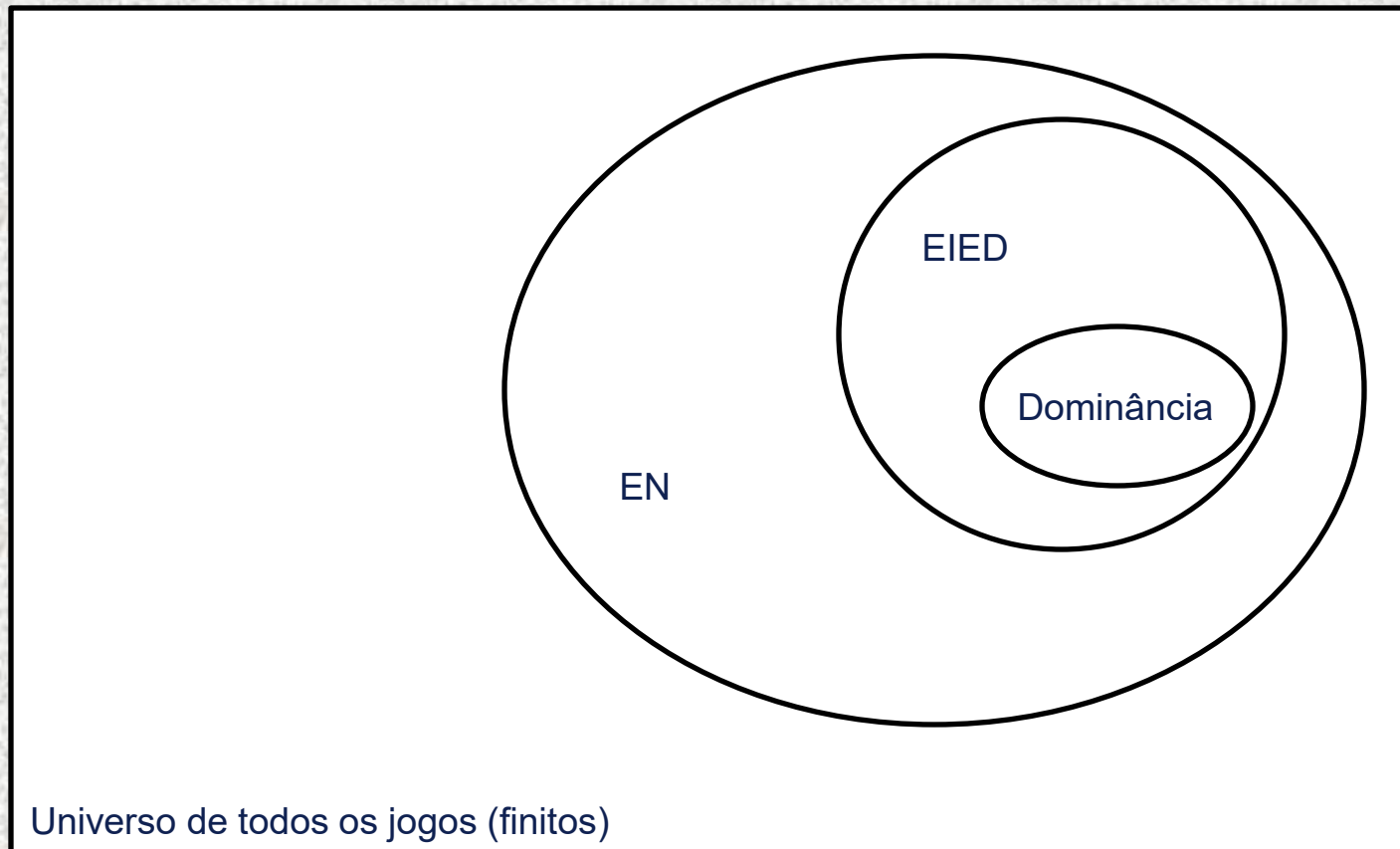
Não há arrependimento após reveladas as estratégias dos demais jogadores.

Dizemos que cada jogador escolhe uma **MELHOR RESPOSTA** às estratégias dos demais jogadores.

2.JEIC 2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.3. Equilíbrio de Nash

Diagrama de Venn II



Apresentação

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

Capítulo 2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal

2.1.2. Solução por Dominância

2.1.3. Equilíbrio de Nash

2.2. Aplicações

2.2.1. Oligopólio de Cournot

2.2.2. Duopólio de Bertrand

2.2.3. Arbitragem de ofertas finais

2.2.1. Oligopólio de Cournot

Equilíbrio de Nash: $x_i = \frac{A-c}{n+1}$; $X = \frac{n}{n+1}(A-c)$; $P = \frac{1}{n+1}(A-c) + c$; $u_i(x) = x_i^2$

Observação: Alterando n :

$$X(n) = \frac{n}{n+1}(A-c); \quad P(n) = \frac{1}{n+1}(A-c) + c$$

$X(n)$?

$X(n)$ é uma sequência estritamente crescente convergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X(n) = A - c$$

$P(n)$?

Como $A \gg c$, $P(n)$ é uma sequência estritamente decrescente convergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = c$$

Que é o custo marginal de produção, i.e., concorrência perfeita!

Apresentação

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

Capítulo 2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal

2.1.2. Solução por Dominância

2.1.3. Equilíbrio de Nash

2.2. Aplicações

2.2.1. Oligopólio de Cournot

2.2.2. Duopólio de Bertrand

2.2.3. Arbitragem de ofertas finais

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

Exemplo 2: Duopólio de Bertrand

$N = \{1,2\}$: duopolistas

Demanda:

$$X = A - P \quad \text{se} \quad P \leq A$$

$$X = 0 \quad \text{se} \quad P > A$$

Custo de produção:

$$c_i(x_i) = cx_i$$

Competição via ANÚNCIO DE PREÇOS

Estratégias distintas:

Anunciam simultaneamente o preço que vão cobrar: $p_i, i = 1, 2$.

Reação do mercado:

Compram de quem oferecer o menor preço, se o mesmo, dividem o mercado

Exemplo 2: Duopólio de Bertrand $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$

$N = \{1, 2\}$: duopolistas

Competição via ANÚNCIO DE PREÇOS

Demanda: $X = A - P$

Custo de produção: $c_i(x_i) = cx_i$

Estratégias: $S_i = [0, +\infty), i = 1, 2$

Utilidades:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (A - p_1)p_1 - c(A - p_1) = (A - p_1)(p_1 - c) & \text{se } p_1 < p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 \geq p_2 \end{cases}$$

Exemplo 2: Duopólio de Bertrand $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$

$N = \{1, 2\}$: duopolistas

Competição via ANÚNCIO DE PREÇOS

Demanda: $X = A - P$

Custo de produção: $c_i(x_i) = cx_i$

Estratégias: $S_i = [0, +\infty), i = 1, 2$

Utilidades:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (A - p_1)p_1 - c(A - p_1) = (A - p_1)(p_1 - c) & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{30 - p_1}{2}(p_1 - 6) & \text{se } p_1 = p_2 \end{cases}$$

Exemplo 2: Duopólio de Bertrand $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$

$N = \{1, 2\}$: duopolistas

Competição via ANÚNCIO DE PREÇOS

Demanda: $X = A - P$

Custo de produção: $c_i(x_i) = cx_i$

Estratégias: $S_i = [0, +\infty), i = 1, 2$

Utilidades:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (A - p_1)p_1 - c(A - p_1) = (A - p_1)(p_1 - c) & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{30 - p_1}{2}(p_1 - 6) & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Exemplo 2: Duopólio de Bertrand $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$

$N = \{1, 2\}$: duopolistas

Competição via ANÚNCIO DE PREÇOS

Demanda: $X = A - P$

Custo de produção: $c_i(x_i) = cx_i$

Estratégias: $S_i = [0, +\infty), i = 1, 2$

Utilidades:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (A - p_1)(p_1 - c) & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{A - p_1}{2}(p_1 - c) & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{A - p_2}{2}(p_2 - c) & \text{se } p_1 = p_2 \\ (A - p_2)(p_2 - c) & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Exemplo 2: Duopólio de Bertrand

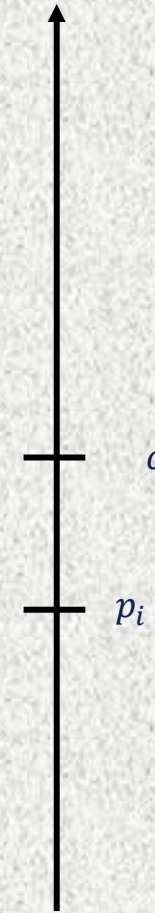
Derivar???

Analisar casos!

Caso 1: $p_1 < c \vee p_2 < c$?

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (A - p_1)(p_1 - c) & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{A - p_1}{2}(p_1 - c) & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{A - p_2}{2}(p_2 - c) & \text{se } p_1 = p_2 \\ (A - p_2)(p_2 - c) & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$



Exemplo 2: Duopólio de Bertrand

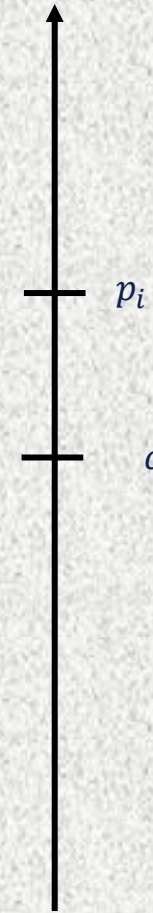
Analisar casos!

Caso 1: $p_1 < c \vee p_2 < c$?

Caso 2: $p_1 > c \vee p_2 > c$?

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (A - p_1)(p_1 - c) & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{A - p_1}{2}(p_1 - c) & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{A - p_2}{2}(p_2 - c) & \text{se } p_1 = p_2 \\ (A - p_2)(p_2 - c) & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$



Exemplo 2: Duopólio de Bertrand

Analisar casos!

Caso 1: $p_1 < c \vee p_2 < c$?

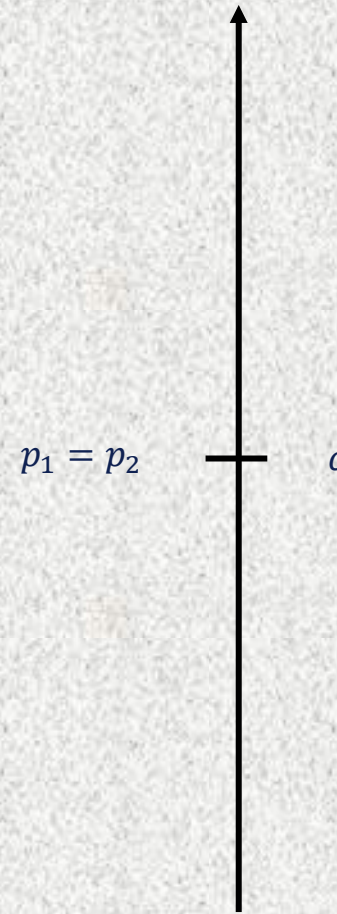
Caso 2: $p_1 > c \vee p_2 > c$?

Caso 3: $p_1 = c \wedge p_2 = c$?

Único equilíbrio de Nash: $p_1 = p_2 = c$

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (A - p_1)(p_1 - c) & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{A - p_1}{2}(p_1 - c) & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{A - p_2}{2}(p_2 - c) & \text{se } p_1 = p_2 \\ (A - p_2)(p_2 - c) & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$



Exemplo 2: Duopólio de Bertrand $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (A - p_1)(p_1 - c) & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{A - p_1}{2}(p_1 - c) & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{A - p_2}{2}(p_2 - c) & \text{se } p_1 = p_2 \\ (A - p_2)(p_2 - c) & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Único equilíbrio de Nash: $p_1 = p_2 = 6$

Condição de equilíbrio competitivo!! Preço=custo marginal

Payoffs: $u_1(c, c) = u_2(c, c) = 0$

E se mais de dois oligopolistas?

Exemplo 2: Duopólio de Bertrand

Comparação entre os dois tipos de competição (Cournot & Bertrand):

Situação estratégica?

Consumidores?

Relação com o comércio eletrônico?

Eugene Orlov (2011), “How Does the Internet Influence Price Dispersion? Evidence from the Airline Industry”, *Journal of Industrial Economics*, 59(1), 21–37. <https://doi.org/10.1111/j.1467-6451.2011.00444.x>

“The results suggest that increases in Internet penetration reduce average price[...]”

Anirban Sengupta & Steven Wiggins (2014), “Airline Pricing, Price Dispersion, and Ticket Characteristics on and off the Internet”, *American Economic Journal: Economic Policy*, 6(1), 272–307. DOI: 10.1257/pol.6.1.272

“Controlling for ticket and flight characteristics, online purchasers pay about 11 percent less than offline purchasers, which seems rooted in more efficient shopping.”

Apresentação

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

Capítulo 2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal

2.1.2. Solução por Dominância

2.1.3. Equilíbrio de Nash

2.2. Aplicações

2.2.1. Oligopólio de Cournot

2.2.2. Duopólio de Bertrand

2.2.3. Arbitragem de ofertas finais

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

2.3.3. Exercícios extras

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

“Final offer arbitration” (Gibbons), baseado em:

Farber, Henry S. "An analysis of final-offer arbitration." *Journal of conflict resolution* 24.4 (1980): 683-705.

Característica principal: o árbitro tem que escolher uma das duas ofertas.

No Brasil, a arbitragem de ofertas finais encontra previsão expressa no art. 4º da Lei nº 10.101/2000, que a define como aquela em que o árbitro deve restringir-se a optar pela proposta apresentada, em caráter definitivo, por uma das partes.

Art. 4º Caso a negociação visando à participação nos lucros ou resultados da empresa resulte em impasse, as partes poderão utilizar-se dos seguintes mecanismos de solução do litígio:

I – mediação;

II – arbitragem de ofertas finais, utilizando-se, no que couber, os termos da Lei nº 9.307, de 23 de setembro de 1996.

§ 1º Considera-se arbitragem de ofertas finais aquela em que o árbitro deve restringir-se a optar pela proposta apresentada, em caráter definitivo, por uma das partes.

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

$n = 2$: empregados e patrões

w : salário final

Empregados: maximizar w

Patrões: minimizar w

$\Rightarrow$ *Jogo de soma zero*

Ótimo do juiz: variável aleatória x

Função de distribuição: $F(x)$

Função densidade de probabilidade: $f(x)$

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

Exp: x uniformemente distribuída em $[0,1]$:

$$f(x) = 1, \quad F(x) = x, \quad \forall x \in [0,1]$$

Exp: x uniformemente distribuída em $[a, b]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad \forall x \in [a, b]$$

Exp: x normalmente distribuída com média m e desvio padrão σ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - m)^2 \right\}$$

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

$$w_s \in S_s = [0, +\infty)$$

$$w_p \in S_p = [0, +\infty)$$

Regra de escolha do juiz, supondo que $w_s \geq w_p$,

$$w_p \quad \text{se} \quad x \leq \frac{w_s + w_p}{2}$$

$$w_s \quad \text{se} \quad x > \frac{w_s + w_p}{2}$$

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

Salário arbitrado **esperado**: depende da realização de x .

$$\Pr[w = w_p] = \Pr\left[x \leq \frac{w_s + w_p}{2}\right] = F\left[\frac{w_s + w_p}{2}\right]$$

$$\Pr[w = w_s] = \Pr\left[x > \frac{w_s + w_p}{2}\right] = 1 - F\left[\frac{w_s + w_p}{2}\right]$$

Portanto, o salário esperado é:

$$w_s \Pr[w = w_s] + w_p \Pr[w = w_p] = w_s - (w_s - w_p) F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right)$$

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

Portanto, a consequência do jogo para o sindicato é:

$$u_s(w_s, w_p) = w_s - (w_s - w_p)F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right)$$

E para o patrão é:

$$u_p(w_s, w_p) = -w_s + (w_s - w_p)F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right)$$

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

$$u_s(w_s, w_p) = w_s - (w_s - w_p)F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) \quad u_p(w_s, w_p) = -w_s + (w_s - w_p)F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right)$$

Se distribuições “bem comportadas”, CPO funcionam:

$$\frac{\partial}{\partial w_s} u_s(w_s, w_p) = 1 - F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) - \frac{1}{2}(w_s - w_p)f\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = 0$$

$$1 - F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = \frac{1}{2}(w_s - w_p)f\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_p} u_s(w_s, w_p) = -F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) + \frac{1}{2}(w_s - w_p)f\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = 0$$

$$F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = \frac{1}{2}(w_s - w_p)f\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right)$$

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

Equilíbrio de Nash:

$$F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = \frac{1}{2}(w_s - w_p)f\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right)$$
$$1 - F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = \frac{1}{2}(w_s - w_p)f\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right)$$
$$F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Portanto, em equilíbrio, a média das ofertas dos dois jogadores será exatamente a mediana, m , da distribuição das preferências do árbitro.

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

$$F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = \frac{1}{2}(w_s - w_p)f\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
$$1 - F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = \frac{1}{2}(w_s - w_p)f\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Substituindo nas condições de primeira ordem obtemos:

$$w_s - w_p = \frac{1}{f\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right)}$$

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

Substituindo nas condições de primeira ordem obtemos:

$$w_s - w_p = \frac{1}{f\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right)} \qquad F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Exp: x uniformemente distribuída em $[0, 1]$

$$f(x) = 1, \quad F(x) = x, \quad \forall x \in [0, 1], \quad m = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} w_s - w_p = 1 \\ \frac{w_s + w_p}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_s - w_p = 1 \\ w_s + w_p = 1 \end{cases}$$

$w_s = 1, w_p = 0$: “Radicalismo estratégico”

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

Substituindo nas condições de primeira ordem obtemos:

$$w_s - w_p = \frac{1}{f\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right)}$$

$$F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Exp: x uniformemente distribuída em $[a, b]$

Exc

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

Substituindo nas condições de primeira ordem obtemos:

$$w_s - w_p = \frac{1}{f\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right)} \qquad F\left(\frac{w_s + w_p}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Exp: x normalmente distribuída com média m e desvio padrão σ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right\}$$

Nesse caso, a média é igual à mediana. Portanto as condições acima equivalem a:

$$\begin{cases} \frac{w_s + w_p}{2} = m \\ w_s - w_p = \frac{1}{f(m)} = \sqrt{2\pi\sigma^2} \end{cases} \Rightarrow w_s = m + \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}, \quad w_p = m - \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$$

Exemplo 3: Arbitragem de ofertas finais

$$w_p = m - \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}, \quad w_s = m + \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$$

A média da distribuição do árbitro “guia” o comportamento estratégico dos jogadores

Quanto maior a incerteza (desvio padrão), maior o radicalismo estratégico

Note o efeito do “ativismo judicial” no aumento do radicalismo na sociedade!

Situação do Supremo (STF) agora?

Apresentação

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

Capítulo 2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal

2.1.2. Solução por Dominância

2.1.3. Equilíbrio de Nash

2.2. Aplicações

2.2.1. Oligopólio de Cournot

2.2.2. Duopólio de Bertrand

2.2.3. Negociação com arbitragem

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

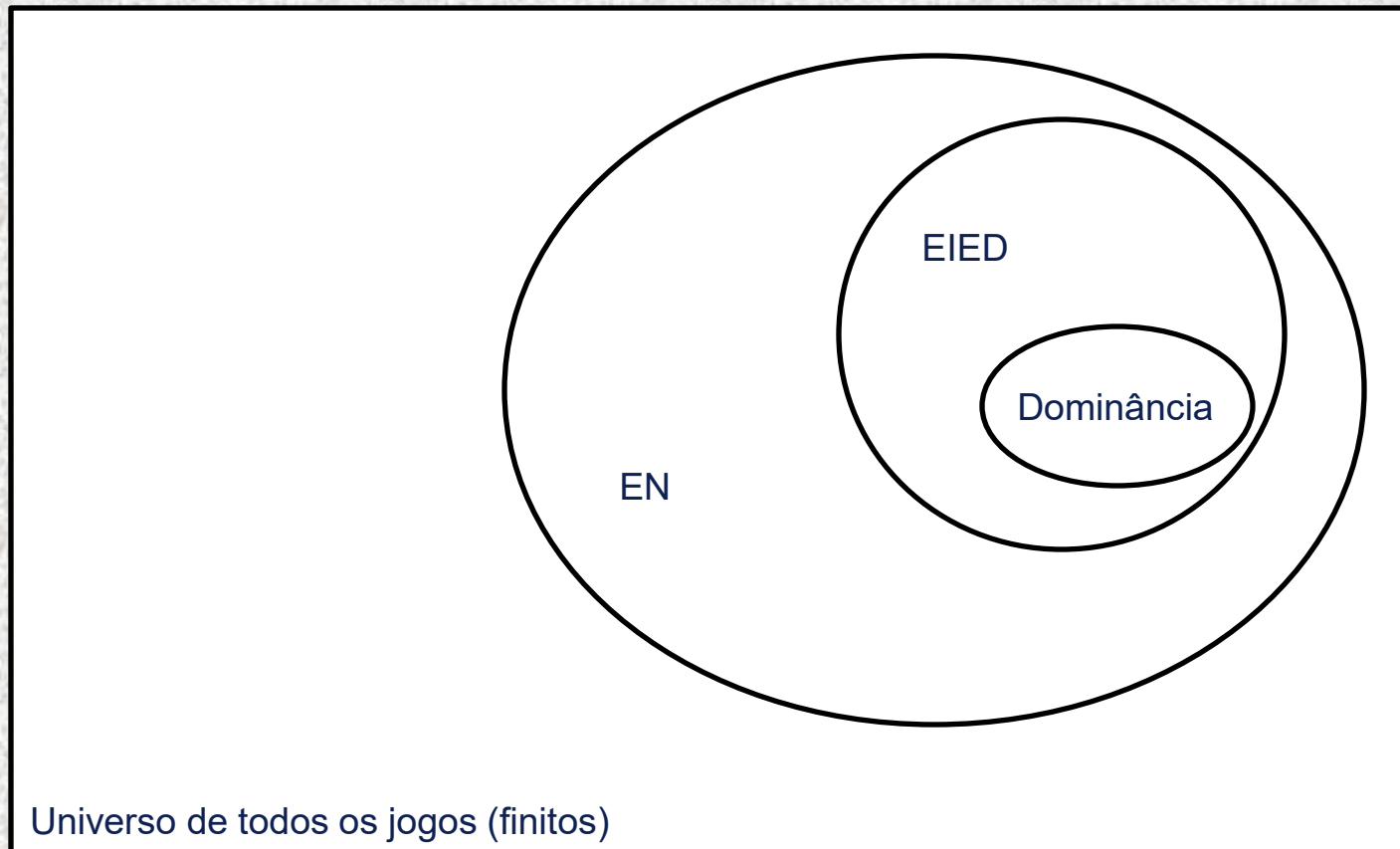
2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

2.3.2. Existência de Equilíbrio de Nash

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Diagrama de Venn II



2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Experimento: Par ou ímpar? Pênalti

		2	
		p	i
1	P	1, -1	-1, 1
	I	-1, 1	1, -1

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Definição- Seja $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo na forma normal no qual os conjuntos de estratégias dos agentes são finitos: $|S_i| = n_i, i = 1, \dots, n$.

Uma *estratégia mista* para o agente i é uma distribuição de probabilidades definida sobre o conjunto S_i :

$$\begin{aligned} \sigma_i: S_i &\rightarrow [0, 1] && \text{tal que} && \sum_k \sigma_i(s_{ik}) = 1 \\ s_{ik} &\mapsto \sigma_i(s_{ik}) \end{aligned}$$

Um *perfil de estratégias mistas* $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ é uma seleção de uma estratégia mista para cada jogador $i, i = 1, \dots, n$.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- par ou ímpar?

		2	
		p	i
1	P	$1, -1$	$-1, 1$
	I	$-1, 1$	$1, -1$

$$\begin{aligned}\sigma &= (\sigma_1, \sigma_2) = \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right) \\ &= \left(\left(\frac{1}{4} \right) P + \left(\frac{3}{4} \right) I, \left(\frac{2}{3} \right) p + \left(\frac{1}{3} \right) i \right)\end{aligned}$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- Pedra, papel ou tesoura?

		2		
		<i>pe</i>	<i>pa</i>	<i>te</i>
1	<i>PE</i>	0, 0	-1, 1	1, -1
	<i>PA</i>	1, -1	0, 0	-1, 1
	<i>TE</i>	-1, 1	1, -1	0, 0

$$\begin{aligned}\sigma &= (\alpha PE + \beta PA + \gamma TE, \lambda pe + \mu pa + \nu te) \\ &= ((\alpha, \beta, \gamma), (\lambda, \mu, \nu))\end{aligned}$$

$$\text{em que } \alpha + \beta + \gamma = \lambda + \mu + \nu = 1$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Definição- Sejam $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo na forma normal finito e $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ um perfil de estratégias (mistas).

Então a **consequência** do jogo para um jogador i quando todos jogam de acordo com o perfil σ é dada por:

$$U_i(\sigma) = Eu_i(\sigma) = \sum \sigma_1(s_1) \sigma_2(s_2) \cdots \sigma_n(s_n) \times u_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

O somatório é tomado sobre todos os possíveis perfis de estratégias puras $s = (s_1, \dots, s_n)$.

O produto $\sigma_1(s_1) \dots \sigma_n(s_n)$ corresponde à probabilidade do perfil s ser o perfil jogado, e $u_i(s_1, \dots, s_n)$ é o payoff do jogador i quando esse perfil é de fato realizado.

Portanto, $Eu_i(\sigma)$ é o payoff esperado (a utilidade esperada) do jogador i quando cada jogador j escolhe a estratégia mista $\sigma_j, j = 1, \dots, n$.

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- par ou ímpar?

		2	
		p	i
1	P	1, -1	-1, 1
	I	-1, 1	1, -1

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right)$$

$$= \left(\left(\frac{1}{4} \right) P + \left(\frac{3}{4} \right) I, \left(\frac{2}{3} \right) p + \left(\frac{1}{3} \right) i \right)$$

$$Eu_1(\sigma) = \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{2}{3} \right) 1 + \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{3} \right) (-1) + \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{2}{3} \right) (-1) + \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{3} \right) 1 = 1/12 - 3/12 = -\frac{1}{6}$$

$$Eu_2(\sigma) = \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{2}{3} \right) (-1) + \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{3} \right) 1 + \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{2}{3} \right) 1 + \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{3} \right) (-1) = -\frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{6}$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- *Pedra, papel ou tesoura?*

		2		
		<i>pe</i>	<i>pa</i>	<i>te</i>
1	<i>PE</i>	0, 0	-1, 1	1, -1
	<i>PA</i>	1, -1	0, 0	-1, 1
	<i>TE</i>	-1, 1	1, -1	0, 0

$$\sigma = (\alpha PE + \beta PA + \gamma TE, \lambda pe + \mu pa + \nu te) = ((\alpha, \beta, \gamma), (\lambda, \mu, \nu))$$

$$\text{em que } \alpha + \beta + \gamma = \lambda + \mu + \nu = 1$$

$$\sigma = (0, 1/2, 1/2), \mu = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$$

$$Eu_1(\sigma, \mu) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)0 = -\frac{1}{3}$$

$$Eu_2(\sigma, \mu) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)0 = \frac{1}{3}$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Definição: Seja $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo finito na forma normal.

A partir de $\mathcal{J}$, pode-se definir o jogo $\Delta\mathcal{J} = (n; \Delta S_i; Eu_i, i = 1, \dots, n)$, em que:

ΔS_i é o conjunto de todas as distribuições de probabilidades sobre o conjunto S_i

Portanto, uma estratégia mista do jogo $\mathcal{J}$ nada mais é que uma estratégia pura do jogo $\Delta\mathcal{J}$.

Equilíbrio de Nash para estratégias mistas: EN em estratégias puras do jogo $\Delta\mathcal{J}$:

Um perfil de estratégias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*) \in \Delta S_1 \times \dots \times \Delta S_n$ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas (ENM) se e somente se, para cada jogador i ,

$$Eu_i(\sigma^*) \geq Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \quad \forall \sigma_i \in \Delta S_i$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- par ou ímpar?

		2	
		$\{\mu\}$ p	$\{1 - \mu\}$ i
1	$\{\lambda\}$ P	1, -1	-1, 1
	$\{1 - \lambda\}$ I	-1, 1	1, -1

$$\begin{aligned} \text{Jogador 1: } Eu_1(\lambda, \mu) &= \lambda\mu - \lambda(1-\mu) - \mu(1-\lambda) + (1-\lambda)(1-\mu) \\ &= (1 - 2\lambda)(1-2\mu) \end{aligned}$$

$$\text{Jogador 2: } Eu_2(\lambda, \mu) = -(1 - 2\lambda)(1-2\mu)$$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo: *par ou ímpar?*

Jogador 1: $Eu_1(\lambda, \mu) = (1 - 2\lambda)(1 - 2\mu)$

Jogador 2: $Eu_2(\lambda, \mu) = -(1 - 2\lambda)(1 - 2\mu)$

Se $\mu < 1/2$

então MR_1 : $\lambda = 0$

Se $\mu = 1/2$

então qualquer valor de λ é uma MR_1

Se $\mu > 1/2$

então MR_1 : $\lambda = 1$

Se $\lambda < 1/2$

então MR_2 : $\mu = 1$

Se $\lambda = 1/2$

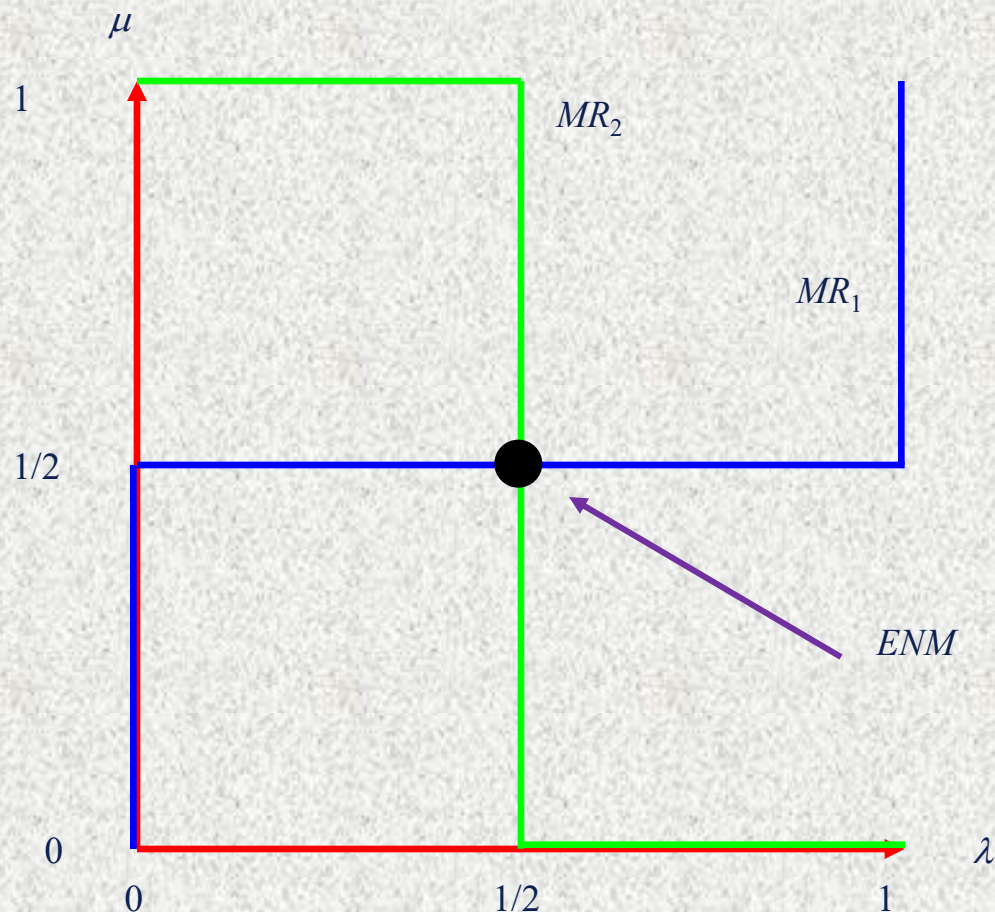
então qualquer valor de μ é uma MR_2

Se $\lambda > 1/2$

então MR_2 : $\mu = 0$

2

		p	i
1	P	1, -1	-1, 1
	I	-1, 1	1, -1



2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- Jogo do Banana

ENM: (λ, μ) . Abordagem alternativa:

$$UE_1(D|\mu) = 0\mu + 10(1 - \mu) = 10 - 10\mu$$

$$UE_1(M|\mu) = 50\mu - 100(1 - \mu) = 150\mu - 100$$

$$D \succ_1 M \Leftrightarrow 10 - 10\mu > 150\mu - 100$$

$$\Leftrightarrow 110 > 160\mu \Leftrightarrow \mu < \frac{11}{16}$$

Se $\mu < 11/16$ então $MR_1: \lambda = 1$

Se $\mu = 11/16$ então qualquer valor de λ é uma MR_1

Se $\mu > 11/16$ então $MR_1: \lambda = 0$

$$UE_2(d|\lambda) = 0\lambda + 10(1 - \lambda) = 10 - 10\lambda$$

$$UE_2(m|\lambda) = 50\lambda - 100(1 - \lambda) = 150\lambda - 100$$

$$d \succ_2 m \Leftrightarrow 10 - 10\lambda > 150\lambda - 100 \Leftrightarrow 110 > 160\lambda \Leftrightarrow \lambda < \frac{11}{16}$$

Se $\lambda < 11/16$ então $MR_2: \mu = 1$

Se $\lambda = 11/16$ então qualquer valor de μ é uma MR_2

Se $\lambda > 11/16$ então $MR_2: \mu = 0$

		2	
		d	m
1	D	0, 0	10, 50
	M	50, 10	-100, -100

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo: *Jogo do Banana*

Se $\mu < 11/16$ então $MR_1: \lambda = 1$

Se $\mu = 11/16$ então qualquer valor de λ é uma MR_1

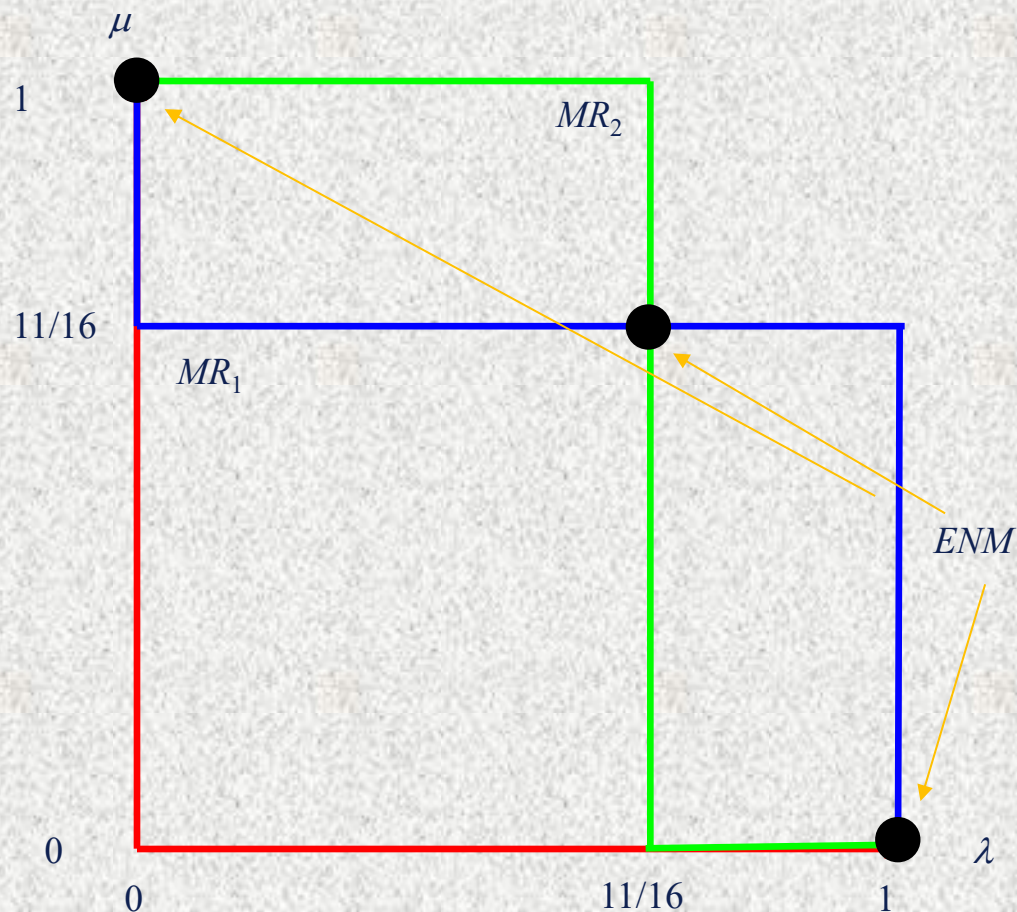
Se $\mu > 11/16$ então $MR_1: \lambda = 0$

Se $\lambda < 11/16$ então $MR_2: \mu = 1$

Se $\lambda = 11/16$ então qualquer valor de μ é uma MR_2

Se $\lambda > 11/16$ então $MR_2: \mu = 0$

		2	
		d	m
1	D	0, 0	10, 50
	M	50, 10	-100, -100



2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- Batalha dos Sexos Assimétrico $0 < \epsilon < 1$

ENM: (λ, μ) . Abordagem alternativa:

$$UE_1(B|\mu) = (3 + \epsilon)\mu + (1 + \epsilon)(1 - \mu) = 2\mu + 1 + \epsilon$$

$$UE_1(S|\mu) = 0\mu + 2(1 - \mu) = 2 - 2\mu$$

$$B \succ_1 S \Leftrightarrow 2\mu + 1 + \epsilon > 2 - 2\mu \Leftrightarrow 4\mu > 1 - \epsilon \Leftrightarrow \mu > \frac{1 - \epsilon}{4}$$

Se $\mu > \frac{1 - \epsilon}{4}$ então $MR_1: \lambda=1$

Se $\mu = \frac{1 - \epsilon}{4}$ então qualquer valor de λ é uma MR_1

Se $\mu < \frac{1 - \epsilon}{4}$ então $MR_1: \lambda=0$

$$UE_2(b|\lambda) = 2\lambda + 0(1 - \lambda) = 2\lambda$$

$$UE_2(s|\lambda) = \lambda + 3(1 - \lambda) = 3 - 2\lambda$$

$$b \succ_2 s \Leftrightarrow 2\lambda > 3 - 2\lambda \Leftrightarrow 4\lambda > 3 \Leftrightarrow \lambda > \frac{3}{4}$$

Se $\lambda > \frac{3}{4}$ então $MR_2: \mu=1$

Se $\lambda = \frac{3}{4}$ então qualquer valor de μ é uma MR_2

Se $\lambda < \frac{3}{4}$ então $MR_2: \mu=0$

		2	
		<i>b</i>	<i>s</i>
1	<i>B</i>	$3 + \epsilon, 2$	$1 + \epsilon, 1$
	<i>S</i>	$0, 0$	$2, 3$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo: *Batalha dos Sexos Assimétrico*

Se $\mu > \frac{1-\epsilon}{4}$ então $MR_1: \lambda=1$

Se $\mu = \frac{1-\epsilon}{4}$ então qualquer valor de λ é uma MR_1

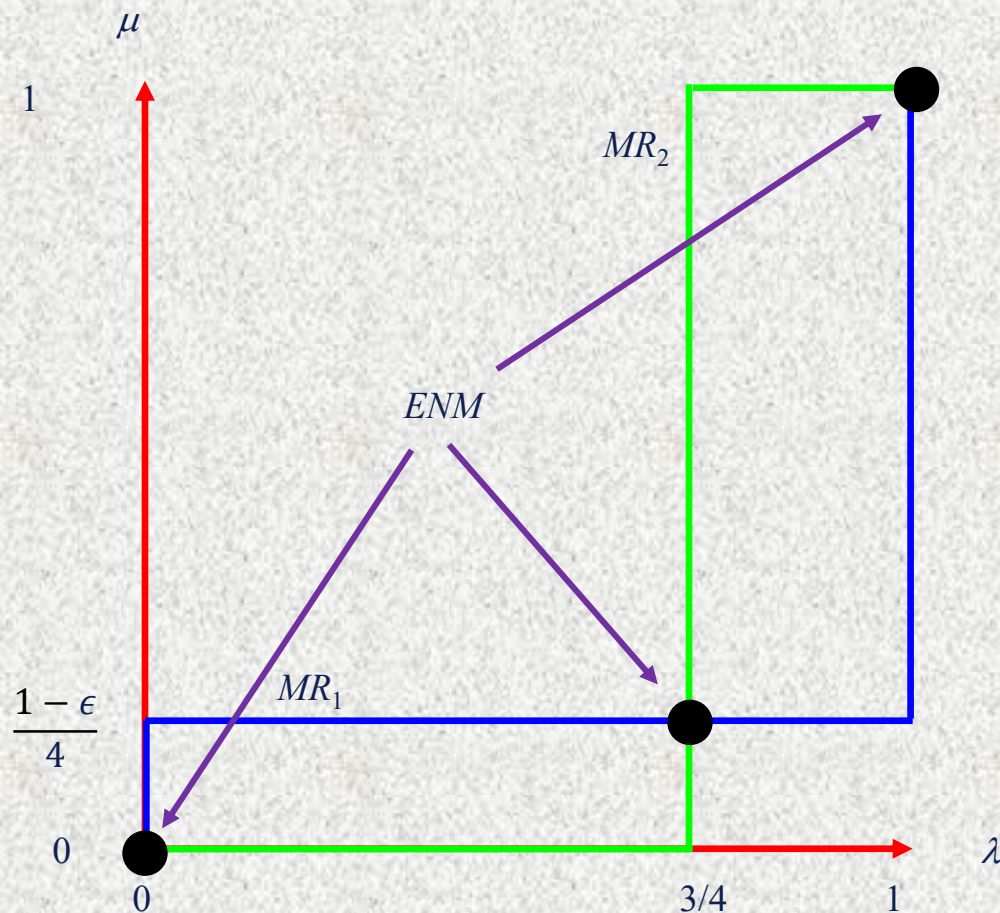
Se $\mu < \frac{1-\epsilon}{4}$ então $MR_1: \lambda=0$

Se $\lambda > \frac{3}{4}$ então $MR_2: \mu=1$

Se $\lambda = \frac{3}{4}$ então qualquer valor de μ é uma MR_2

Se $\lambda < \frac{3}{4}$ então $MR_2: \mu=0$

		2	
		<i>b</i>	<i>s</i>
1	<i>B</i>	$3 + \epsilon, 2$	$1 + \epsilon, 1$
	<i>S</i>	$0, 0$	$2, 3$



Soluções:

EN: $(B, b), (S, s)$

ENM: $\left(\frac{3}{4}B + \frac{1}{4}S, \frac{1-\epsilon}{4}b + \frac{3+\epsilon}{4}s\right)$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Exemplo- Batalha dos Sexos Assimétrico $0 < \epsilon < 1$

Soluções:

$$\text{EN: } (B, b), (S, s); \quad \text{ENM: } \left(\frac{3}{4}B + \frac{1}{4}S, \frac{1-\epsilon}{4}b + \frac{3+\epsilon}{4}s \right)$$

Note:

Se $\epsilon = 0$, então ENM simétrico:

$$\left(\frac{3}{4}B + \frac{1}{4}S, \frac{1}{4}b + \frac{3}{4}s \right)$$

Cada um apresenta o mesmo viés na direção preferida. Probabilidade de não se encontrarem:

$$\left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{10}{16} = 0,625$$

Se $0 < \epsilon < 1$, então:

Há um viés de preferência por parte de 1

Que gera um viés de radicalização na estratégia de 2:

O jogador 2 vai ao lugar preferido pelo 1 com probabilidade ainda menor!

Para que 2 consiga "disciplinar" 1!!

Probabilidade de não se encontrarem:

$$\frac{3(3+\epsilon)}{4^2} + \frac{1-\epsilon}{4^2} = \frac{10}{16} + \frac{\epsilon}{8} = 0,625 + \frac{\epsilon}{2}$$

Discussão:

ENM como mecanismo para disciplinar o outro jogador

Radicalismo estratégico

Aumenta a probabilidade de desencontro!

		2	
		<i>b</i>	<i>s</i>
1	<i>B</i>	$3 + \epsilon, 2$	$1 + \epsilon, 1$
	<i>S</i>	$0, 0$	$2, 3$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Observações:

- Todo EN em estratégias puras é um ENM
- *EIED?*

		2		
		t_1	t_2	t_3
1	s_1	14, 12	18, 2	12, 6
	s_2	10, 2	16, 12	16, 6

$$\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 > t_3$$

No jogo resultante, $s_1 > s_2$

No jogo resultante, $t_1 > t_2$

Portanto, o único EN encontrado por EIED é (s_1, s_2)

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Observações:

- ENM

		2		
		A	B	C
1	a	-1, 1	2, -2	5, 0
	b	0, 3	1, 2	4, 3
	c	2, -2	-1, 1	6, -3
	d	2, 2	1, 3	4, 1

$$a \succ_1 d$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \succ_1 b$$

No jogo resultante, $A \succ_2 C$

No jogo resultante, Portanto, o jogo foi reduzido a um jogo 2x2

O único EN desse jogo é $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Proposição. Caracterização de Equilíbrios de Nash em estratégias mistas.

Seja $J = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo finito na forma normal.

Então são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) σ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

(ii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,

$$\text{Se } \sigma_i(s_i) > 0 \text{ então } Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$$

$$\text{Se } \sigma_i(s_i) = 0 \text{ então } Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$$

(iii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,

$$Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$$

Demonstração: Mostremos que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Proposição. Caracterização de Equilíbrios de Nash em estratégias mistas.

Seja $J = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo finito na forma normal.

Então são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) σ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

(ii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,

$$\text{Se } \sigma_i(s_i) > 0 \text{ então } Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$$

$$\text{Se } \sigma_i(s_i) = 0 \text{ então } Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$$

(iii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,

$$Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$$

Demonstração: Mostremos que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii): Por definição, $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i}), \forall s_i \in S_i$

Portanto, resta apenas provar que se $\sigma_i(s_i) > 0$, não podemos ter desigualdade estrita

Suponha, por absurdo, que $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$ para algum s_i tal que $\sigma_i(s_i) > 0$

Então necessariamente haveria $s'_i \in S_i$ tal que: $\sigma_i(s'_i) > 0$ e $Eu_i(s'_i, \sigma_{-i}) > Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$

Mas então defina a estratégia mista σ'_i por:

$$\sigma'_i(s_i) = 0; \sigma'_i(s'_i) = \sigma_i(s_i) + \sigma_i(s'_i); \sigma'_i(s''_i) = \sigma_i(s''_i), \forall s''_i \neq s_i, s'_i$$

satisfaz:

$$Eu_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Contradição

2.3. Estratégias mistas e existência de Equilíbrio de Nash

2.3.1. Estratégias mistas: Definição e exemplos

Resposta 5: ENM

Proposição. Caracterização de Equilíbrios de Nash em estratégias mistas.

Seja $J = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo finito na forma normal. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

- (i) σ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.
- (ii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,
Se $\sigma_i(s_i) > 0$ então $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$
Se $\sigma_i(s_i) = 0$ então $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$
- (iii) Para todo jogador i e para toda estratégia pura $s_i \in S_i$,
 $Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq Eu_i(s_i, \sigma_{-i})$

Demonstração: Mostremos que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii): OK

(ii) $\Rightarrow$ (iii): imediato

(iii) $\Rightarrow$ (i): imediato

Observação. Em particular, para todos $s_i, s'_i \in S_i, \sigma$ ENM,

se $\sigma_i(s_i)\sigma_i(s'_i) > 0$ então $Eu_i(s_i, \sigma_{-i}) = Eu_i(s'_i, \sigma_{-i})$