

Teoria dos Jogos

Prof. Maurício Bugarin

Eco/UnB

EPRG-Economics and Politics Research Group

Conceitos fundamentais

Jogos estáticos com informação completa

Lista de Exercícios 1. Ricardo Oliveira admite receber por gols

Artigo publicado no Estado de São Paulo, 14/04/2003.

Ricardo Oliveira se cansou de ouvir insinuações de que estaria sendo boicotado por Diego e Robinho em razão de uma cláusula em seu contrato que prevê premiação especial por gols marcados e demonstra disposição em renunciar à vantagem. "Se eu sentir que está havendo problema, retiro na hora essa cláusula do meu contrato", prometeu, após o treino desta segunda-feira à tarde, no CT Rei Pelé. "Essa questão não existe e está sendo criada pelas pessoas que insistem em falar no assunto."

O atacante se recusa a esclarecer detalhes da cláusula, mas assegura que ela é normal. "Meu contrato na Portuguesa de Desportos incluía prêmio por convocação para a Seleção Brasileira e para o caso de eu ser o artilheiro." O presidente do clube, Marcelo Teixeira, disse, na semana, que é prática comum, quando há diferença entre o que um jogador pede e o que o clube oferece ser incluída esse tipo de cláusula para compor o salário. Ricardo Oliveira também recusa o rótulo de fominha. "Quando surge a oportunidade para eu passar a bola para um companheiro melhor colocado, sempre passo. Esse tipo de comentário me entristece, mas não vai me abalar e nem ao grupo", garante. O artilheiro lembra que entrou no time e vinha fazendo gols em todos os jogos, até ficar sem marcar nas três primeiras partidas do Campeonato Brasileiro. "Isso é porque os adversários estão pegando mais forte. Se Robinho e Diego não me passam mais a bola é porque os dois estão sendo desarmados mais do que antes".

Robinho riu da situação e parece considerar normal a premiação. "Se ele conseguiu, sorte dele." Preto, que vai entrar no time contra o El Nacional, nesta quarta-feira à noite, acha justo o artilheiro ganhar pelos gols que faz, mas faz uma ressalva. "Só que se um ganha, os outros também merecem."

(i) Você acha interessante remunerar jogadores de futebol de forma variável com base nos gols marcados pelo jogador? Com base no caso acima, quais as dificuldades e riscos de se implementar este tipo de remuneração? O que você sugeriria especificamente no caso de times de futebol?

(ii) Em geral, a premiação por desempenho é considerada um incentivo forte à dedicação ("high powered incentives"). Instituições como a EPGE/FGV e a USP remuneram publicações em periódicos de elevado nível acadêmico. Quais podem ser as consequências dessa premiação no caso das instituições acadêmicas?

Apresentação professor

Apresentação alunos

Apresentação disciplina

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

1.1. Exemplos reais

1.2. Conceitos básicos de jogos

Breve recapitulação histórica:

Antoine Augustin Cournot, 1838: Estudo de duopólio

Início século XX: Efervescência!

Emile Borel, 1921: primeira formalização de jogo

John von Neumann, 1928: Theory of parlor games

John von Neumann (1903-57) & Oskar Morgenstern (1902-77)

1944: Theory of Games and Economic Behavior, toda a base moderna da teoria, ainda que focado em "jogos de soma zero"
Conceito de utilidade esperada.



Oskar Morgenstern e John von Neumann.
(Shelby White and Leon Levy Archives Center)

Breve recapitulação histórica:

Antoine Augustin Cournot, 1838: Estudo de duopólio

Início século XX: Efervescência!

Emile Borel, 1921: primeira formalização de jogo

John von Neumann, 1928

John von Neumann & Oskar Morgenstern, 1944

John Nash, 1950: O conceito mais poderoso de equilíbrio em jogos não cooperativos: Melhor resposta mútua (e cooperativos: Nash Bargaining solution)



John Nash



John von Neumann e Oskar Morgenstern

Breve recapitulação histórica:

Augustin Cournot, 1838

Início século XX: Efervescência!

John Nash, 1950

Na segunda metade do século XX, foi se infiltrando em toda a teoria econômica, incluindo a macroeconomia, e se expandindo para outras áreas do conhecimento, como guerra, relações internacionais, ciência política, biologia, sociologia, psicologia, história e direito...

Apresentação prof.

Apresentação alunos

Apresentação disciplina

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

1.1. Exemplos reais

1.2. Conceitos básicos de jogos

Capítulo 2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal

2.1.2. Solução por Dominância

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

Jogos estáticos: todos os jogadores jogam ao mesmo tempo, uma única vez

Com informação completa: todos sabem exatamente as consequências de cada jogada (**completa**) para cada jogador.

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

$$J = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$$

N é um conjunto de agentes, chamados de *jogadores*.

Para cada $i \in N$, S_i é o conjunto de *estratégias* (ações, decisões) que podem ser escolhidas pelo jogador i

A coleção $s = (s_j)_{j \in N}$ de uma estratégia para cada jogador é chamada de um *perfil de estratégias* ou uma *jogada*

Para cada $i \in N$, $u_i: \prod_{j \in N} S_j \rightarrow \mathcal{R}$ descreve a consequência para o jogador i das estratégias escolhidas por todos os jogadores

O valor $u_i(s)$ é chamado *consequência*, *resultado* ou *payoff* do jogo para o agente i , associado ao perfil de estratégias s .

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Observação-Forma Matricial:

Exemplo: *O Dilema dos Prisioneiros*

		2	
		c	n
1	C	$-6, -6$	$0, -9$
	N	$-9, 0$	$-1, -1$

Variações:

Carreira armamentista

Gastos de campanha

Protecionismo

Prisão temporária e operação Lava-Jato

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Observação-Forma Matricial:

Exemplo: *O Dilema dos Prisoneiros*

$$J = (N; S_1, S_2; u_1, u_2),$$

$$N = \{1, 2\}$$

$$S_1 = \{C, N\}, S_2 = \{c, n\}$$

$$s = (s_1, s_2)$$

$$u_1(C, c) = -6$$

$$u_2(C, c) = -6$$

$$u_1(C, n) = 0$$

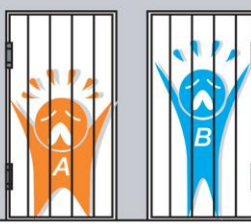
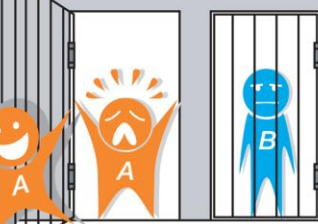
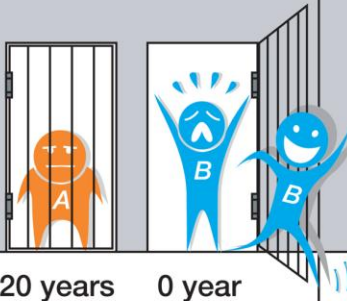
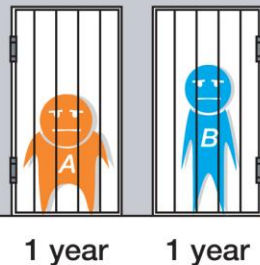
$$u_2(C, n) = -9$$

$$u_1(N, c) = -9$$

$$u_2(N, c) = 0$$

$$u_1(N, n) = -1$$

$$u_2(N, n) = -1$$

Prisoners' dilemma		prisoner B			
		confess 	remain silent 		
prisoner A	confess 	 5 years 5 years	 0 year 20 years		
	remain silent 	 20 years 0 year	 1 year 1 year		

© 2010 Encyclopædia Britannica, Inc.

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Observação-Forma Matricial:

Exemplo- *Um jogo simples 3x3: O Jogo dos Irmãos*

		2		
		<i>tv</i>	<i>vg</i>	<i>f</i>
1	<i>TV</i>	0, 0	1, 2	1, 3
	<i>VG</i>	2, 1	2, 2	2, 3
	<i>F</i>	3, 1	3, 2	4, 4

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Observação-Forma Matricial:

Exemplo- *Duopólio de Cournot com um número finito de estratégias*

		2		
		6	8	11
1	6	72, 72	60, 80	42, 77
	8	80, 60	64, 64	40, 55
	11	77, 42	55, 40	22, 22

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Observação-Forma Matricial:

Exemplo- *Batalha dos Sexos*

		2	
		a	b
1	A	3, 2	1, 1
	B	0, 0	2, 3

The Battle of Sexes (Peixe na rede & Schloß)

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Observação-Forma Matricial:

Exemplo- *Jogo do Banana*

		2	
		d	m
1	D	0, 0	10, 50
	M	50, 10	-100, -100

Chicken, Hawk-Dove

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

- Observação-Forma Matricial:

Exemplo- *Um jogo com 3 jogadores*

		J_2					J_2					J_2		
		0	2	4			0	2	4			0	2	4
J_1	0	0, 0, 0	-1, 2, -1	-2, 4, -2		-1, -1, 2	-2, 1, 1	-3, 3, 0		-2, -2, 4	-3, 0, 3	-4, 2, 2		
	2	2, -1, -1	1, 1, -2	0, 3, -3		1, -2, 1	0, 0, 0	-1, 2, -1		0, -3, 3	-1, -1, 2	-2, 1, 1		
	4	4, -2, -2	3, 0, -3	2, 2, -4		3, -3, 0	2, -1, -1	1, 1, -2		2, -4, 2	1, -2, 1	0, 0, 0		
J_3		0					2					4		

$$u_i(s) = s_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} s_j$$

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Notação: N finito:

$$N = \{1, 2, \dots, n\}, \quad J = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n), \quad s = (s_1, \dots, s_n)$$

$$s = (s_j)_{j \in N}$$

$$S = \prod_{j \in N} S_j$$

$$s = (s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$$

$$s_{-i} = (s_j)_{j \neq i}$$

$$S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$$

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Notação: N finito: $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $J = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$

Exemplo:

		J_2			J_2			J_2		
		0	2	4	0	2	4	0	2	4
J_1	0	0, 0, 0	-1, 2, -1	-2, 4, -2	-1, -1, 2	-2, 1, 1	-3, 3, 0	-2, -2, 4	-3, 0, 3	-4, 2, 2
	2	2, -1, -1	1, 1, -2	0, 3, -3	1, -2, 1	0, 0, 0	-1, 2, -1	0, -3, 3	-1, -1, 2	-2, 1, 1
	4	4, -2, -2	3, 0, -3	2, 2, -4	3, -3, 0	2, -1, -1	1, 1, -2	2, -4, 2	1, -2, 1	0, 0, 0
J_3		0			2			4		

$$N = \{J_1, J_2, J_3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = \{0, 2, 4\}$$

$$s = (s_1, s_2, s_3)$$

$$u_i(s) = s_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} s_j$$

Apresentação prof.

Apresentação alunos

Apresentação disciplina

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

1.1. Exemplos reais

1.2. Conceitos básicos de jogos

Capítulo 2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal

2.1.2. Solução por Dominância

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Exemplo- *O Jogo dos Irmãos*

		2		
		<i>tv</i>	<i>vg</i>	<i>f</i>
1	<i>TV</i>	0, 0	1, 2	1, 3
	<i>VG</i>	2, 1	2, 2	2, 3
	<i>F</i>	3, 1	3, 2	4, 4

Equilíbrio: (F, f) em estratégias dominantes.

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância PAREI AQUI

Definição- Seja um jogo na forma normal e sejam $s_i, s'_i \in S_i$ duas estratégias de um agente $i \in N$.

(i) Dizemos que a estratégia s_i domina estritamente a estratégia s'_i se:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

(ii) Se uma estratégia s_i domina estritamente todas as outras estratégias do jogador i , dizemos que s_i é uma estratégia dominante.

(iii) Se todo jogador i possuir uma estratégia dominante s_i , dizemos que o jogo J é solúvel por estratégias dominantes.

Nesse caso $s = (s_i)_{i \in N}$ é a **solução do jogo por estratégias dominantes**.

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Exemplo: *O Dilema dos Prisioneiros*

		2	
		c	n
1	C	$-6, -6$	$0, -9$
	N	$-9, 0$	$-1, -1$

Equilíbrio: (C, c)

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Observação-Forma Matricial:

Exemplo-*Um jogo com três jogadores*

		J_2			J_2			J_2		
		0	2	4	0	2	4	0	2	4
J_1	0	0, 0, 0	-1, 2, -1	-2, 4, -2	-1, -1, 2	-2, 1, 1	-3, 3, 0	-2, -2, 4	-3, 0, 3	-4, 2, 2
	2	2, -1, -1	1, 1, -2	0, 3, -3	1, -2, 1	0, 0, 0	-1, 2, -1	0, -3, 3	-1, -1, 2	-2, 1, 1
	4	4, -2, -2	3, 0, -3	2, 2, -4	3, -3, 0	2, -1, -1	1, 1, -2	2, -4, 2	1, -2, 1	0, 0, 0
J_3		0			2			4		

$$u_i(s) = s_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} s_j$$

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Observação-Forma Matricial:

			0	2	4				0	2	4				0	2	4
J_1	0	0, 0, 0	-1, 2, -1	-2, 4, -2	-1, -1, 2	-2, 1, 1	-3, 3, 0	-2, -2, 4	-3, 0, 3	-4, 2, 2							
	2	2, -1, -1	1, 1, -2	0, 3, -3	1, -2, 1	0, 0, 0	-1, 2, -1	0, -3, 3	-1, -1, 2	-2, 1, 1							
	4	4, -2, -2	3, 0, -3	2, 2, -4	3, -3, 0	2, -1, -1	1, 1, -2	2, -4, 2	1, -2, 1	0, 0, 0							
J_3		0			2			4									

Exemplo-Um jogo com três jogadores

$$u_i(s) = s_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} s_j$$

				J_2							J_2							J_2		
				0	2	4					0	2	4					0	2	4
J_1	0	0, 0, 0		-1, 1, -1		-2, 2, -2		-1, -1, 1		-2, 0, 0		-3, 1, -1		-2, -2, 2		-3, -1, 1		-4, 0, 0		
	2	1, -1, -1		0, 0, -2		-1, 1, -3		0, -2, 0		-1, -1, -1		-2, 0, -2		-1, -3, 1		-2, -2, 0		-3, -1, -1		
	4	2, -2, -2		1, -1, -3		0, 0, -4		1, -3, -1		0, -2, -2		-1, -1, -3		0, -4, 0		-1, -3, -1		-2, -2, -2		
J_3				0				2						4						

$$u_i(s) = s_i - \frac{1}{2} \sum_j s_j$$

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Exemplo- *Duopólio de Cournot com um número finito de estratégias*

		2		
		6	8	11
1	6	72, 72	60, 80	42, 77
	8	80, 60	64, 64	40, 55
	11	77, 42	55, 40	22, 22

Equilíbrio: (8, 8), obtido por Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas: *EIED*

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Definição- Seja um jogo na forma normal e sejam $s_i, s'_i \in S_i$ duas estratégias de um agente $i \in N$.

- (i) Suponha que a estratégia s_i domina estritamente a estratégia s'_i . Então o jogador nunca será do interesse do jogador i escolher a estratégia s'_i , uma vez que, quaisquer que sejam as estratégias dos demais jogadores, s_{-i} , a estratégia s_i resulta maior payoff que a estratégia s'_i :

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Mas então, por racionalidade, a estratégia s'_i pode ser eliminada do conjunto de estratégias do jogador i , gerando um jogo reduzido, mais simples com relação ao anterior

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Definição- Seja um jogo na forma normal e sejam $s_i, s'_i \in S_i$ duas estratégias de um agente $i \in N$.

- (i) Jogo reduzido, mais simples com relação ao anterior
- (ii) Se, no jogo reduzido, for identificada alguma estratégia estritamente dominada para algum jogador, então pelo mesmo argumento essa estratégia pode ser excluída de seu conjunto de estratégias, obtendo-se assim um jogo ainda mais reduzido
- (iii) Esse processo pode ser repetido enquanto existirem estratégias estritamente dominadas. Se, ao final do processo, cada jogador i tiver seu conjunto de estratégias reduzido a um único elemento s_i , então o perfil de estratégias $s = (s_i)_{i \in N}$ é a:

**solução do jogo por eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas
(EIED)**

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Proposição:

Suponha que um jogo admite uma solução $s = (s_i)_{i=1,\dots,n}$ em estratégias dominantes.

Então o processo de eliminação de estratégias estritamente dominadas leva a uma única solução do jogo, que é justamente s .

Resolução:

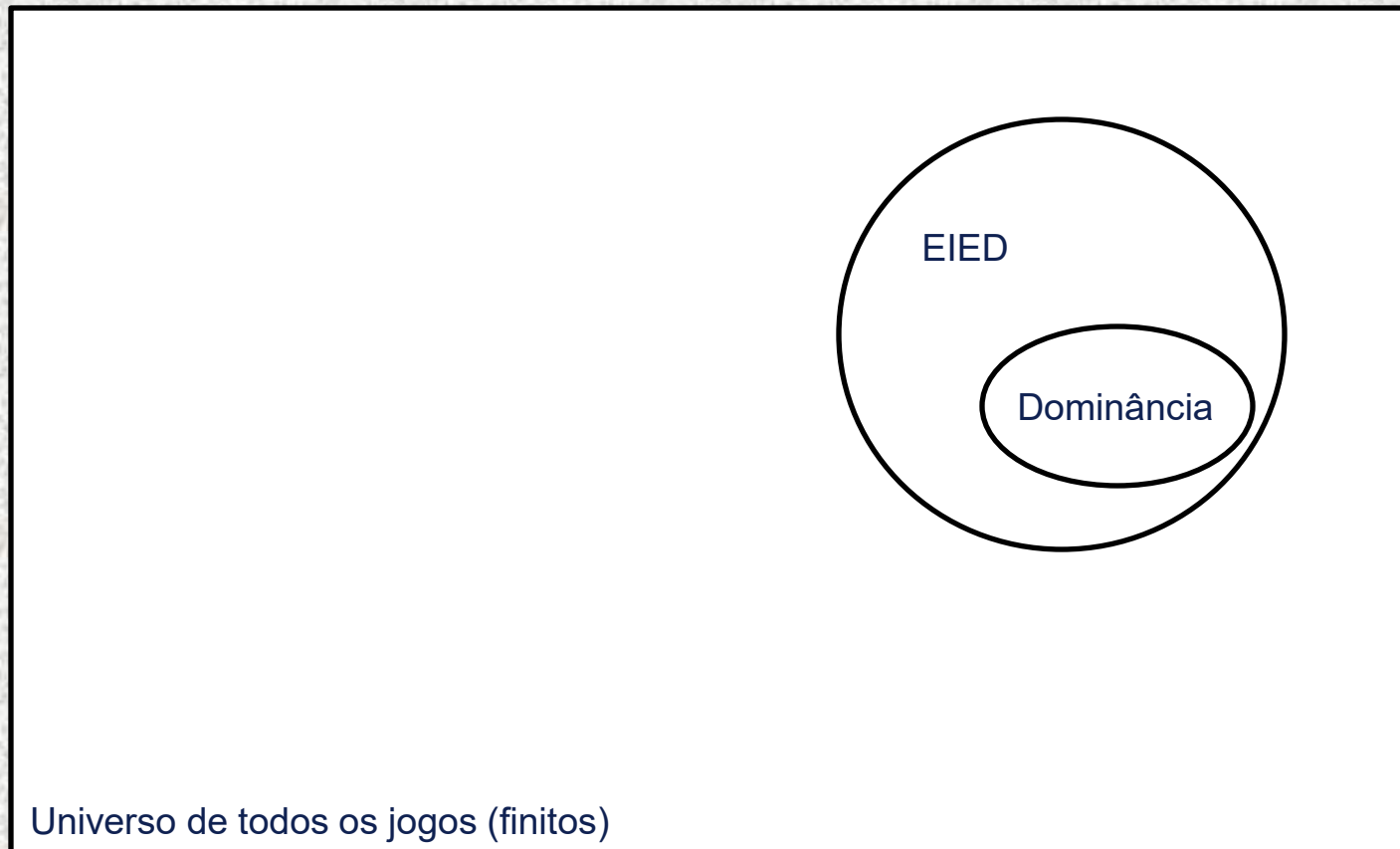
Trivial: Para cada jogador i , a estratégia s_i domina todas as demais estratégias, portanto, qualquer que seja a ordem de aplicação do processo de *EIED*, o conjunto de estratégias de i será reduzido a $\{s_i\}$.

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Diagrama de Venn I



2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Resumo: Dois algoritmos para obtenção de soluções:

Buscar estratégias dominantes:

- requer simples racionalidade dos jogadores

Eliminar estratégias estritamente dominadas:

- Requer que a racionalidade seja *conhecimento comum* entre os jogadores

- Portanto, conceito mais “exigente” de racionalidade

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Exemplo-

		2			
		A	B	C	D
1	a	1, 7	0, 2	3, 6	4, 8
	b	4, 2	1, 3	7, 1	5, 0
	c	3, 3	2, 5	4, 3	6, 2
	d	2, 7	1, 6	3, 7	7, 3

Equilíbrio: (c, B) , obtido por Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas: *EIED*

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Desafio:

Mostre que se o processo de EIED levar a um perfil de estratégias, esse perfil de estratégias é o mesmo qualquer que seja a ordem de eliminação de estratégias estritamente dominadas escolhido.

Demonstração:

Suponha, por contradição, que aplicando o processo de EIED seguindo uma ordem o_1 leva a um resultado s e que aplicando-o seguindo outra ordem o_2 leva a outro resultado $s' \neq s$.

Então $s'_j \neq s_j$ para pelo menos um jogador $j \in N$.

Portanto, alguma estratégia no perfil s' é eliminada durante o processo o_1 .

Seja s'_i a primeira estratégia no perfil s' eliminada durante esse processo o_1 .

Então existe $s''_i \in S_i$ tal que:

$$u_i(s''_i, s'_{-i}) > u_i(s'_i, s'_{-i}) \quad (1)$$

No entanto, como o processo o_2 resultou no perfil s' , temos:

$$u_i(s'_i, s'_{-i}) \geq u_i(s''_i, s'_{-i}) \quad (2)$$

Mas as condições (1) e (2) levam a uma contradição, o que conclui a demonstração.

2.JEIC 2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Observação

Exemplo- *Batalha dos Sexos*

		2	
		a	b
1	A	3, 2	1, 1
	B	0, 0	2, 3

Não é solúvel por dominância!

Busquemos alguma característica dos equilíbrios anteriores que pode ser replicada neste jogo

Apresentação

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

Capítulo 2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal

2.1.2. Solução por Dominância

2.1.3. Equilíbrio de Nash

2.2. Aplicações

2.2.1. Oligopólio de Cournot

2.2.2. Duopólio de Bertrand

2.2.3. Negociação com arbitragem

2.1.3. Equilíbrio de Nash

Exemplo- *Duopólio de Cournot com um número finito de estratégias*

			2		
			6	8	11
	6	72, 72	60, 80	42, 77	
1	8	80, 60	64, 64	40, 55	
	11	77, 42	55, 40	22, 22	

Perfil (8, 8) é o único que tem essa característica de **não arrependimento**:

Nenhum jogador se arrepende de sua jogada, dada a escolha do outro jogador

Definição- *Equilíbrio de Nash*

Seja $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo na forma normal.

Um perfil de estratégias $s^* = (s_i^*)_{i \in N}$ é chamado um *equilíbrio de Nash (EN)* se para cada jogador $i = 1, \dots, n$, dadas as escolhas dos demais jogadores (s_{-i}^*) ,

o melhor que i pode fazer é escolher s_i^* :

$$\forall i \in N, \forall s'_i \in S_i, u_i(s^*) \geq u_i(s'_i, s_{-i}^*)$$

Observação:

Não há arrependimento após reveladas as estratégias dos demais jogadores.

Dizemos que cada jogador escolhe uma MELHOR RESPOSTA às estratégias dos demais jogadores.

Observação: Outras interpretações do conceito de equilíbrio de Nash:

- (i) Previsão “sugerida” que é estrategicamente estável: “Joguem assim!”
- (ii) Expectativas racionais.
- (iii) Myerson: “Why not?”

Definição- *Equilíbrio de Nash*

Seja $\mathcal{J} = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ um jogo na forma normal.

Um perfil de estratégias $s^* = (s_i^*)_{i \in N}$ é chamado um *equilíbrio de Nash (EN)* se para cada jogador $i = 1, \dots, n$, dadas as escolhas dos demais jogadores (s_{-i}^*) ,

o melhor que i pode fazer é escolher s_i^* :

$$\forall i \in N, \forall s'_i \in S_i, u_i(s^*) \geq u_i(s'_i, s_{-i}^*)$$

Observação:

Comparação com estratégias dominantes:

$$\forall s'_i \in S_i, u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

2.JEIC 2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.3. Equilíbrio de Nash

Exemplo- *O Jogo dos Irmãos*

		2		
		<i>tv</i>	<i>vg</i>	<i>f</i>
1	<i>TV</i>	0, 0	1, 2	1, 3
	<i>VG</i>	2, 1	2, 2	2, 3
	<i>F</i>	3, 1	3, 2	4, 4

2.JEIC 2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.3. Equilíbrio de Nash

Exemplo- Um jogo com três jogadores

$$u_i(s) = s_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} s_j$$

		J_2					J_2					J_2		
		0	2	4			0	2	4			0	2	4
J_1	0	0, 0, 0	-1, 2, -1	-2, 4, -2		-1, -1, 2	-2, 1, 1	-3, 3, 0		-2, -2, 4	-3, 0, 3	-4, 2, 2		
	2	2, -1, -1	1, 1, -2	0, 3, -3		1, -2, 1	0, 0, 0	-1, 2, -1		0, -3, 3	-1, -1, 2	-2, 1, 1		
	4	4, -2, -2	3, 0, -3	2, 2, -4		3, -3, 0	2, -1, -1	1, 1, -2		2, -4, 2	1, -2, 1	0, 0, 0		
J_3		0					2					4		

2.JEIC 2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.3. Equilíbrio de Nash

Relação entre solução por dominância e equilíbrio de Nash:

Proposição 1:

Suponha que cada jogador i num jogo $\mathcal{J} = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ possui uma estratégia estritamente dominante s_i .

Então $s = (s_i)_{i=1, \dots, n}$ é o único equilíbrio de Nash do jogo.

Resolução:

Mostremos em primeiro lugar que s é um equilíbrio de Nash.

Suponha, por contradição, que s não é um equilíbrio de Nash.

Então, existem um jogador i e uma estratégia $s'_i \in S_i$ disponível para o jogador i , tais que:

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad (i)$$

Mas então, necessariamente, $s'_i \neq s_i$.

Como s_i é uma estratégia estritamente dominante,

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}) \quad (ii)$$

Mas (i) e (ii) são incompatíveis (contradição).

Portanto, s é um equilíbrio de Nash do jogo.

2.1.3. Equilíbrio de Nash

Exemplo- O Dilema dos Prisioneiros

		2	
		c	n
1	C	$-6, -6$	$0, -9$
	N	$-9, 0$	$-1, -1$

Exemplo- *Batalha dos Sexos*

		2	
		a	b
1	A	3, 2	1, 1
	B	0, 0	2, 3

2.JEIC 2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.3. Equilíbrio de Nash

Exemplo- *Jogo do Banana*

		2	
		d	m
1	D	0, 0	10, 50
	M	50, 10	-100, -100

Chicken, Hawk-Dove

2.JEIC 2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.3. Equilíbrio de Nash

Relação entre solução por dominância e equilíbrio de Nash:

Proposição 1: Suponha que cada jogador i num jogo $\mathcal{J} = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ possui uma estratégia estritamente dominante s_i .

Então $s = (s_i)_{i=1, \dots, n}$ é o único equilíbrio de Nash do jogo.

Resolução:

Mostremos em primeiro lugar que s é um equilíbrio de Nash. OK

Mostremos agora que não existe outro equilíbrio de Nash nesse jogo.

Suponha, por contradição, que existe um EN do jogo $s' = (s'_i)_{i=1, \dots, n}$ distinto de s .

Então existem um jogador i e uma estratégia $s'_i \in S_i$, disponível para o jogador i , $s'_i \neq s_i$, tais que:

$$u_i(s'_i, s'_{-i}) \geq u_i(s_i, s'_{-i}) \quad (i)$$

No entanto, como s_i é uma estratégia estritamente dominante do jogador i ,

$$u_i(s_i, s'_{-i}) > u_i(s'_i, s'_{-i}) \quad (ii)$$

Novamente, as condições (i) e (ii) levam a uma contradição, o que garante a unicidade do equilíbrio de Nash s .

Relação entre solução por dominância e equilíbrio de Nash:

Proposição 2:

Seja $\mathcal{J} = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ um jogo na forma normal em que cada jogador possui um número finito de estratégias, ou seja, S_i é um conjunto finito para todo $i = 1, \dots, n$. Suponha que o processo de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas (*EIED*) leva a uma solução $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$.

Então, s^* é o único equilíbrio de Nash do jogo.

Resolução:

Exercício. (Desafio)

2.JEIC 2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.3. Equilíbrio de Nash

Diagrama de Venn II

