

Teoria dos Jogos

Prof. Maurício Bugarin

Eco/UnB

EPRG-Economics and Politics Research Group

Conceitos fundamentais

Jogos estáticos com informação completa

Apresentação professor

Apresentação alunos

Apresentação disciplina

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

1.1. Exemplos reais

1.2. Conceitos básicos de jogos

Apresentação professor

Apresentação alunos

Apresentação disciplina

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

1.1. Exemplos reais

1.2. Conceitos básicos de jogos

O que é a Teoria dos Jogos?

“The art of outdoing your adversary, knowing that the adversary is trying to do the same as you”

Dixit & Nalebuff, 1993

“Understanding situations in which decision-makers interact”

Osborne, 2012

“The study of mathematical models of conflict and cooperation between intelligent rational decision makers”

Myerson, 1991

“Behavior of decision makers (players) whose decisions affect each other”

Aumann, 1987

“The study of multiperson decision problems”

Gibbons, 1992

“The art of finding ways to cooperate, even when others are motivated by self-interest, not benevolence. [...] The art of putting yourself in others’ shoes so as to predict and influence what they will do.”

Dixit & Nalebuff, 2008

O que é um Jogo?

Características:

- **Vários** agentes
- Tomando **decisões**
- Tal que o **resultado da interação para um agente depende das decisões dos demais**

Duas hipóteses fundamentais:

- Racionalidade
- Conhecimento comum

Classificação de jogos:

Quanto à cooperação: Jogos cooperativos & jogos não cooperativos

Quanto à dinâmica: Jogos estáticos & jogos dinâmicos

Quanto à informação: perfeita & imperfeita

Quanto à informação: completa & incompleta

Quanto ao horizonte temporal: finitos & infinitos

Quanto à dimensão: discretos & contínuos

Modelos Formais:

Jogos na forma coalizional

Jogos na forma normal ou estratégica

Jogos na forma extensiva

Formas híbridas

Modelagem & Solução:

Modelagem: Descreve a situação estratégica a ser analisada

Traduz em linguagem formal uma situação específica

Solução: Busca determinar como o jogo será jogado

Usa conceitos de equilíbrio

Cuidado: Dois processos distintos e independentes

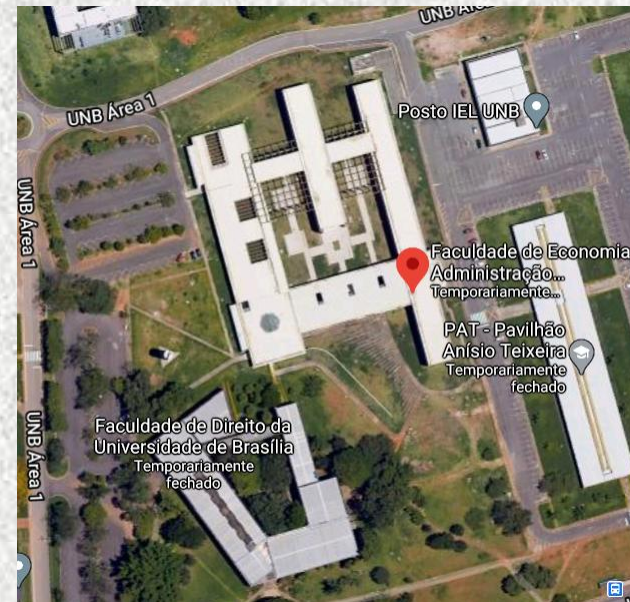
Objetivo do estudioso de teoria dos jogos:

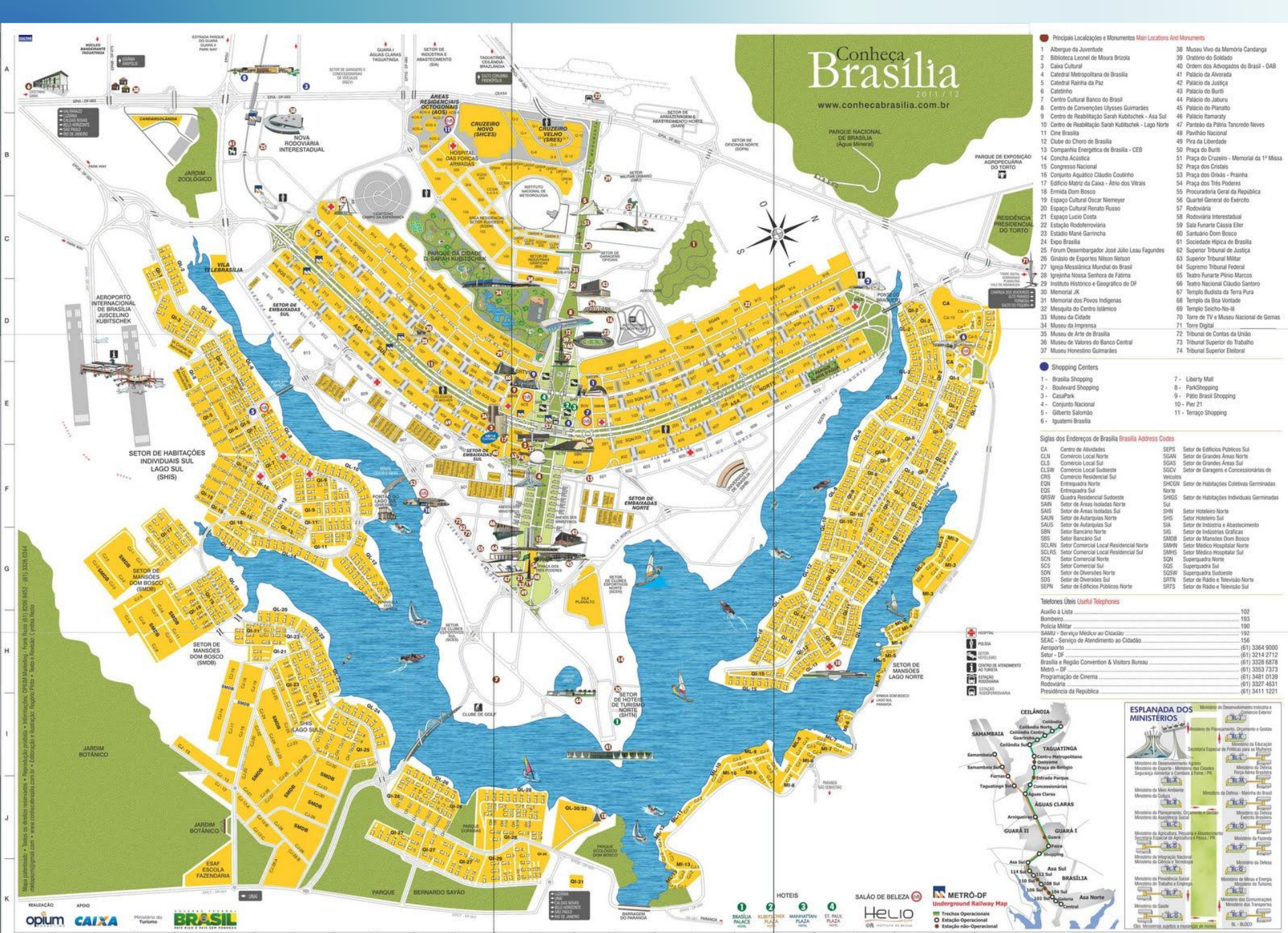
Descobrir a forma “obvia” de se jogar!
David Kreps, 1990

Críticas à teoria e respostas:

1. Exagerado nível de simplificação

Modelo! Mapa

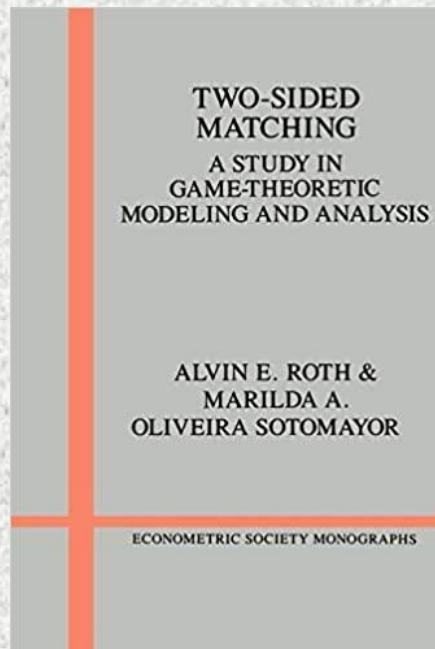




Críticas à teoria e respostas:

1. Exagerado nível de simplificação
2. Sofisticação do conceito de racionalidade

Aumann: Prefácio livro Marilda: Quando importa...



It is sometimes asserted that game theory is not “descriptive” of the “real world,” that people don’t really behave according to game-theoretic prescriptions. To back up such assertions, some workers have conducted experiments using poorly motivated subjects, subjects who do not understand what they are about and are paid off by pittance; as if such experiments represented the real world. We see here that in the *real* real world – when the chips are down, the payoff is not five dollars but a successful career, and people have time to understand the situation – the predictions of game theory fare quite well.

The authors are to be warmly congratulated for this fine piece of work, which is quite unique in the game-theoretic literature.

Críticas à teoria e respostas:

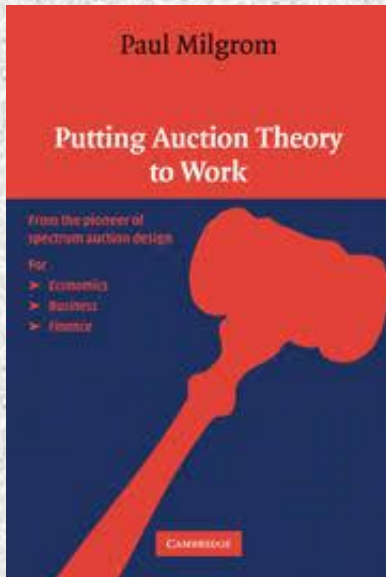
1. Exagerado nível de simplificação

Modelo! Mapa

2. Sofisticação do conceito de racionalidade

Aumann: Prefácio livro Marilda: Quando importa...

Mais recentemente: Spectrum auctions & incentive auctions



Leiam:

Bugarin, M. “Leilões: A Teoria dos Jogos e o Prêmio Nobel de Economia de 2020”. **Revista Conceito Jurídico** 4(47):77-83, 2020.

Carrasco, V. (2020). “Nobel 2020: Paul Milgrom e Robert Wilson”. **Terraço Econômico**, 10 de outubro.

Críticas à teoria e respostas:

1. Exagerado nível de simplificação

Modelo! Mapa

2. Sofisticação do conceito de racionalidade

Aumann: Prefácio livro Marilda: Quando importa...

Mais recentemente: Spectrum auctions & incentive auctions

Friedman: Poder de previsão: “Como se...”

3. Multiplicidade de soluções

Aprofundar análise do jogo (refinamentos, racionalidade)

Ou então: em vez de fraqueza, força:

a realidade é mesmo muito complexa =>

muitos possíveis equilíbrios

Breve recapitulação histórica:

Antoine Augustin Cournot (1801-1877):

1838: Estudo de duopólio

Considerado o primeiro modelo teórico envolvendo as ideias básicas de jogos

Curva de reação: "Melhor resposta"



<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cournot/>

Breve recapitulação histórica:

Antoine Augustin Cournot, 1838: Estudo de duopólio

Início século XX: Efervescência!

Emile Borel (1871-1956)

1921: primeira formalização de jogo



<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Borel/>

Breve recapitulação histórica:

Antoine Augustin Cournot, 1838: Estudo de duopólio

Início século XX: Efervescência!

Emile Borel, 1921: primeira formalização de jogo

John von Neumann (1903-1957)

1928: formalização mais conhecida: Theory of parlor games



https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Von_Neumann/

Breve recapitulação histórica:

Antoine Augustin Cournot, 1838: Estudo de duopólio

Início século XX: Efervescência!

Emile Borel, 1921: primeira formalização de jogo

John von Neumann, 1928: Theory of parlor games

John von Neumann (1903-57) & Oskar Morgenstern (1902-77)

1944: Theory of Games and Economic Behavior, toda a base moderna da teoria, ainda que focado em "jogos de soma zero"



<https://leiturapotiguar.com.br/2018/12/29/john-von-neumann-e-oskar-morgenstern-genios-que-criaram-juntos-a-teoria-dos-jogos-e-comportamento-economico-uma-das-mais-brilhantes-obras-publicadas-no-seculo-xx/>

Breve recapitulação histórica:

Antoine Augustin Cournot, 1838: Estudo de duopólio

Início século XX: Efervescência!

Emile Borel, 1921: primeira formalização de jogo

John von Neumann, 1928

John von Neumann & Oskar Morgenstern, 1944

John Nash, 1950: O conceito mais poderoso de equilíbrio em jogos não cooperativos: Melhor resposta mútua (e cooperativos: Nash Bargaining solution)



John Nash



Teoria dos Jogos

Breve recapitulação histórica:

Augustin Cournot, 1838

Início século XX: Efervescência!

John Nash, 1950

Na segunda metade do século XX, foi se infiltrando em toda a teoria econômica, incluindo a macroeconomia, e se expandindo para outras áreas do conhecimento, como guerra, relações internacionais, ciência política, biologia, sociologia, psicologia, história e direito...

Apresentação prof.

Apresentação alunos

Apresentação disciplina

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

1.1. Exemplos reais

1.2. Conceitos básicos de jogos

Capítulo 2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal

2.1.2. Solução por Dominância

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

Jogos estáticos: todos os jogadores jogam ao mesmo tempo, uma única vez

Com informação completa: todos sabem exatamente as consequências de cada jogada (**completa**) para cada jogador.

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

$$J = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$$

N é um conjunto de agentes, chamados de *jogadores*.

Para cada $i \in N$, S_i é o conjunto de *estratégias* (ações, decisões) que podem ser escolhidas pelo jogador i

A coleção $s = (s_j)_{j \in N}$ de uma estratégia para cada jogador é chamada de um *perfil de estratégias* ou uma *jogada*

Para cada $i \in N$, $u_i: \prod_{j \in N} S_j \rightarrow \mathcal{R}$ descreve a consequência para o jogador i das estratégias escolhidas por todos os jogadores

O valor $u_i(s)$ é chamado *consequência*, *resultado* ou *payoff* do jogo para o agente i , associado ao perfil de estratégias s .

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Observação-Forma Matricial:

Exemplo: *O Dilema dos Prisioneiros*

		2	
		c	n
1	C	$-6, -6$	$0, -9$
	N	$-9, 0$	$-1, -1$

Variações:

Carreira armamentista

Gastos de campanha

Protecionismo

Prisão temporária e operação Lava-Jato

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Observação-Forma Matricial:

Exemplo: *O Dilema dos Prisoneiros*

$$J = (N; S_1, S_2; u_1, u_2),$$

$$N = \{1, 2\}$$

$$S_1 = \{C, N\}, S_2 = \{c, n\}$$

$$s = (s_1, s_2)$$

$$u_1(C, c) = -6$$

$$u_2(C, c) = -6$$

$$u_1(C, n) = 0$$

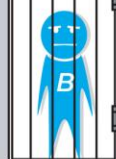
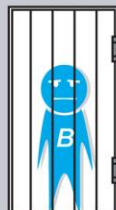
$$u_2(C, n) = -9$$

$$u_1(N, c) = -9$$

$$u_2(N, c) = 0$$

$$u_1(N, n) = -1$$

$$u_2(N, n) = -1$$

Prisoners' dilemma		prisoner B				
		confess 	remain silent 			
prisoner A	confess 	    	5 years	5 years	0 year	20 years
	remain silent 	   	20 years	0 year	1 year	1 year

© 2010 Encyclopædia Britannica, Inc.

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Observação-Forma Matricial:

Exemplo- *Um jogo simples 3x3: O Jogo dos Irmãos*

		2		
		<i>tv</i>	<i>vg</i>	<i>f</i>
1	<i>TV</i>	0, 0	1, 2	1, 3
	<i>VG</i>	2, 1	2, 2	2, 3
	<i>F</i>	3, 1	3, 2	4, 4

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Observação-Forma Matricial:

Exemplo- *Duopólio de Cournot com um número finito de estratégias*

		2		
		6	8	11
1	6	72, 72	60, 80	42, 77
	8	80, 60	64, 64	40, 55
	11	77, 42	55, 40	22, 22

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Observação-Forma Matricial:

Exemplo- *Batalha dos Sexos*

		2	
		a	b
1	A	3, 2	1, 1
	B	0, 0	2, 3

The Battle of Sexes (Peixe na rede & Schloß)

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Observação-Forma Matricial:

Exemplo- *Jogo do Banana*

		2	
		d	m
1	D	0, 0	10, 50
	M	50, 10	-100, -100

Chicken, Hawk-Dove

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

- Observação-Forma Matricial:

Exemplo- *Um jogo com 3 jogadores*

		J_2					J_2					J_2		
		0	2	4			0	2	4			0	2	4
J_1	0	0, 0, 0	-1, 2, -1	-2, 4, -2			-1, -1, 2	-2, 1, 1	-3, 3, 0			-2, -2, 4	-3, 0, 3	-4, 2, 2
	2	2, -1, -1	1, 1, -2	0, 3, -3			1, -2, 1	0, 0, 0	-1, 2, -1			0, -3, 3	-1, -1, 2	-2, 1, 1
	4	4, -2, -2	3, 0, -3	2, 2, -4			3, -3, 0	2, -1, -1	1, 1, -2			2, -4, 2	1, -2, 1	0, 0, 0
J_3		0					2					4		

$$u_i(s) = s_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} s_j$$

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Notação: N finito:

$$N = \{1, 2, \dots, n\}, \quad J = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n), \quad s = (s_1, \dots, s_n)$$

$$s = (s_j)_{j \in N}$$

$$S = \prod_{j \in N} S_j$$

$$s = (s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$$

$$s_{-i} = (s_j)_{j \neq i}$$

$$S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$$

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal ou Estratégica

Notação: N finito: $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $J = (n; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$

Exemplo:

		J_2			J_2			J_2		
		0	2	4	0	2	4	0	2	4
J_1	0	0, 0, 0	-1, 2, -1	-2, 4, -2	-1, -1, 2	-2, 1, 1	-3, 3, 0	-2, -2, 4	-3, 0, 3	-4, 2, 2
	2	2, -1, -1	1, 1, -2	0, 3, -3	1, -2, 1	0, 0, 0	-1, 2, -1	0, -3, 3	-1, -1, 2	-2, 1, 1
	4	4, -2, -2	3, 0, -3	2, 2, -4	3, -3, 0	2, -1, -1	1, 1, -2	2, -4, 2	1, -2, 1	0, 0, 0
J_3		0			2			4		

$$N = \{J_1, J_2, J_3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = \{0, 2, 4\}$$

$$s = (s_1, s_2, s_3)$$

$$u_i(s) = s_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} s_j$$

Apresentação prof.

Apresentação alunos

Apresentação disciplina

Capítulo 1. Introdução: Por que pensar estrategicamente?

1.1. Exemplos reais

1.2. Conceitos básicos de jogos

Capítulo 2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.1. A Forma Normal

2.1.2. Solução por Dominância

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Exemplo- *O Jogo dos Irmãos*

		2		
		<i>tv</i>	<i>vg</i>	<i>f</i>
1	<i>TV</i>	0, 0	1, 2	1, 3
	<i>VG</i>	2, 1	2, 2	2, 3
	<i>F</i>	3, 1	3, 2	4, 4

Equilíbrio: (F, f) em estratégias dominantes.

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância PAREI AQUI

Definição- Seja um jogo na forma normal e sejam $s_i, s'_i \in S_i$ duas estratégias de um agente $i \in N$.

(i) Dizemos que a estratégia s_i domina estritamente a estratégia s'_i se:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

(ii) Se uma estratégia s_i domina estritamente todas as outras estratégias do jogador i , dizemos que s_i é uma estratégia dominante.

(iii) Se todo jogador i possuir uma estratégia dominante s_i , dizemos que o jogo J é solúvel por estratégias dominantes.

Nesse caso $s = (s_i)_{i \in N}$ é a **solução do jogo por estratégias dominantes**.

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Exemplo: *O Dilema dos Prisioneiros*

		2	
		c	n
1	C	$-6, -6$	$0, -9$
	N	$-9, 0$	$-1, -1$

Equilíbrio: (C, c)

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Observação-Forma Matricial:

Exemplo-*Um jogo com três jogadores*

		J_2			J_2			J_2		
		0	2	4	0	2	4	0	2	4
J_1	0	0, 0, 0	-1, 2, -1	-2, 4, -2	-1, -1, 2	-2, 1, 1	-3, 3, 0	-2, -2, 4	-3, 0, 3	-4, 2, 2
	2	2, -1, -1	1, 1, -2	0, 3, -3	1, -2, 1	0, 0, 0	-1, 2, -1	0, -3, 3	-1, -1, 2	-2, 1, 1
	4	4, -2, -2	3, 0, -3	2, 2, -4	3, -3, 0	2, -1, -1	1, 1, -2	2, -4, 2	1, -2, 1	0, 0, 0
J_3		0			2			4		

$$u_i(s) = s_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} s_j$$

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Observação-Forma Matricial:

			0	2	4				0	2	4				0	2	4
J_1	0	0, 0, 0	-1, 2, -1	-2, 4, -2	-1, -1, 2	-2, 1, 1	-3, 3, 0	-2, -2, 4	-3, 0, 3	-4, 2, 2							
	2	2, -1, -1	1, 1, -2	0, 3, -3	1, -2, 1	0, 0, 0	-1, 2, -1	0, -3, 3	-1, -1, 2	-2, 1, 1							
	4	4, -2, -2	3, 0, -3	2, 2, -4	3, -3, 0	2, -1, -1	1, 1, -2	2, -4, 2	1, -2, 1	0, 0, 0							
J_3		0			2			4									

Exemplo-Um jogo com três jogadores

$$u_i(s) = s_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} s_j$$

				J_2							J_2							J_2		
				0	2	4					0	2	4					0	2	4
J_1	0	0, 0, 0		-1, 1, -1		-2, 2, -2		-1, -1, 1		-2, 0, 0		-3, 1, -1		-2, -2, 2		-3, -1, 1		-4, 0, 0		
	2	1, -1, -1		0, 0, -2		-1, 1, -3		0, -2, 0		-1, -1, -1		-2, 0, -2		-1, -3, 1		-2, -2, 0		-3, -1, -1		
	4	2, -2, -2		1, -1, -3		0, 0, -4		1, -3, -1		0, -2, -2		-1, -1, -3		0, -4, 0		-1, -3, -1		-2, -2, -2		
J_3				0				2						4						

$$u_i(s) = s_i - \frac{1}{2} \sum_j s_j$$

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Exemplo- *Duopólio de Cournot com um número finito de estratégias*

		2		
		6	8	11
1	6	72, 72	60, 80	42, 77
	8	80, 60	64, 64	40, 55
	11	77, 42	55, 40	22, 22

Equilíbrio: (8, 8), obtido por Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas: *EIED*

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Definição- Seja um jogo na forma normal e sejam $s_i, s'_i \in S_i$ duas estratégias de um agente $i \in N$.

- (i) Suponha que a estratégia s_i domina estritamente a estratégia s'_i . Então o jogador nunca será do interesse do jogador i escolher a estratégia s'_i , uma vez que, quaisquer que sejam as estratégias dos demais jogadores, s_{-i} , a estratégia s_i resulta maior payoff que a estratégia s'_i :

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Mas então, por racionalidade, a estratégia s'_i pode ser eliminada do conjunto de estratégias do jogador i , gerando um jogo reduzido, mais simples com relação ao anterior

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Definição- Seja um jogo na forma normal e sejam $s_i, s'_i \in S_i$ duas estratégias de um agente $i \in N$.

- (i) Jogo reduzido, mais simples com relação ao anterior
- (ii) Se, no jogo reduzido, for identificada alguma estratégia estritamente dominada para algum jogador, então pelo mesmo argumento essa estratégia pode ser excluída de seu conjunto de estratégias, obtendo-se assim um jogo ainda mais reduzido
- (iii) Esse processo pode ser repetido enquanto existirem estratégias estritamente dominadas. Se, ao final do processo, cada jogador i tiver seu conjunto de estratégias reduzido a um único elemento s_i , então o perfil de estratégias $s = (s_i)_{i \in N}$ é a:

**solução do jogo por eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas
(EIED)**

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Proposição:

Suponha que um jogo admite uma solução $s = (s_i)_{i=1,\dots,n}$ em estratégias dominantes.

Então o processo de eliminação de estratégias estritamente dominadas leva a uma única solução do jogo, que é justamente s .

Resolução:

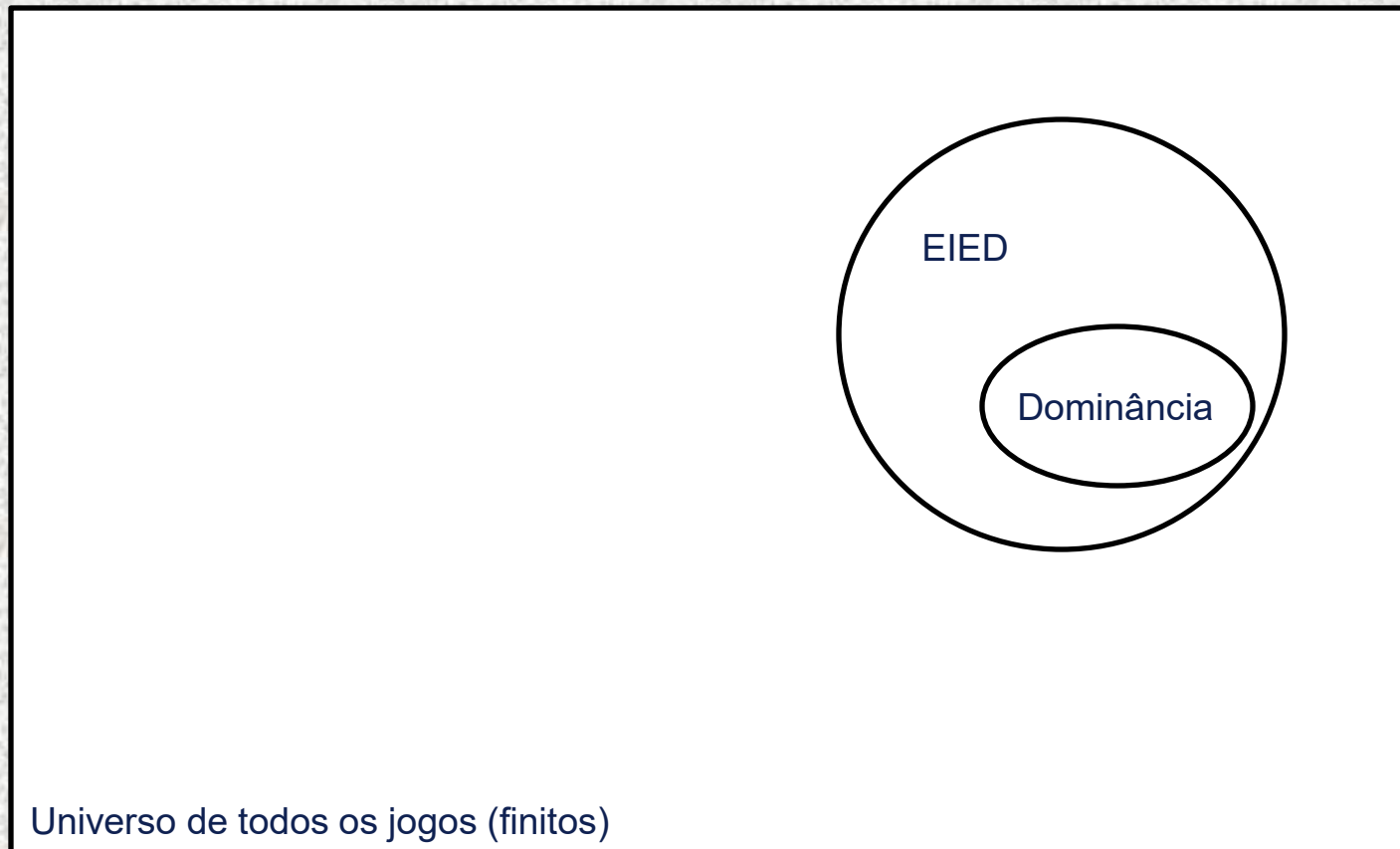
Trivial: Para cada jogador i , a estratégia s_i domina todas as demais estratégias, portanto, qualquer que seja a ordem de aplicação do processo de *EIED*, o conjunto de estratégias de i será reduzido a $\{s_i\}$.

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Diagrama de Venn I



2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Resumo: Dois algoritmos para obtenção de soluções:

Buscar estratégias dominantes:

- requer simples racionalidade dos jogadores

Eliminar estratégias estritamente dominadas:

- Requer que a racionalidade seja *conhecimento comum* entre os jogadores

- Portanto, conceito mais “exigente” de racionalidade

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Exemplo-

		2			
		A	B	C	D
1	a	1, 7	0, 2	3, 6	4, 8
	b	4, 2	1, 3	7, 1	5, 0
	c	3, 3	2, 5	4, 3	6, 2
	d	2, 7	1, 6	3, 7	7, 3

Equilíbrio: (c, B) , obtido por Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas: *EIED*

2. Jogos estáticos com informação completa

2.1. A Forma Normal e o Conceito de Equilíbrio de Nash

2.1.2. Solução por Dominância

Desafio:

Mostre que o processo de EIED leva ao mesmo jogo reduzido qualquer que seja a ordem de eliminação de estratégias estritamente dominadas escolhido.

Sugestão:

Proceda por contradição.