

TÓPICOS ESPECIAIS EM MICROECONOMIA – TEORIA DOS JOGOS

GRADUAÇÃO – ECO0282

PROFESSOR MAURÍCIO SOARES BUGARIN, Eco/UNB

mauricio.s.bugarin@gmail.com ; www.bugarinmauricio.com

8ª Lista de Exercícios – Leilões

Objetivos: Treinar a busca de ENB em leilões no modelo de valores privados independentes e simétricos

Questão 1 – Leilões

Ao longo do curso estudamos diversos formatos de leilão, tendo o Teorema de Equivalência de Receitas mostrado que muitos deles geram a mesma receita esperada para o leiloeiro. O objetivo deste exercício é buscar uma regra de leilão de estimule lances mais elevados nos participantes, na expectativa de aumentar a receita esperada do vendedor. Considere, portanto, um leilão selado com dois participantes com valores privados, simétricos, independentes, distribuídos no intervalo $[0, \omega]$ segundo a função de distribuição de probabilidades $F(x)$ e densidade $f(x) = F'(x)$.

As regras do leilão são as seguintes:

- (a) Quem fizer o maior lance, recebe o objeto.
 - (b) O vencedor paga um valor correspondendo à diferença entre o primeiro e o segundo maior lances.
 - (c) O perdedor, por sua vez paga um percentual $\beta \in [0,1]$ de seu lance (l): βl .
- Note que se $\beta = 0$, há claramente um estímulo a lances mais altos uma vez que o perdedor não paga a totalidade de seu lance.

Buscamos um ENB simétrico, estritamente crescente, duas vezes continuamente diferenciável (por essa razão sequer defini acima o que ocorre em caso de empate).

- (i) Apresente a utilidade esperada ínterim do jogador 1 de tipo $x \in [0, \omega]$ quando ele faz um lance l e seu oponente usa a estratégia $\lambda(\cdot)$: $U_1(l; x) = U_1(l, \lambda(\cdot); x, \alpha, \beta)$.
Sugestão: Inicialmente use integrais, depois faça as integrações correspondentes; se necessário, defina por $\Lambda F(\cdot)$ uma primitiva da função $\lambda(\cdot)f(\cdot)$.

(ii) Calcule a condição de primeira ordem $\frac{d}{dl} U_1(l; x) = 0$. Lembrando que na solução procurada $l = \lambda(x)$ e que $(\lambda^{-1})'(\lambda(x)) = (\lambda'(x))^{-1}$, reescreva a CPO em função de $\lambda(x), \lambda'(x), F(x), f(x), \beta$.

(iii) Considere o caso particular em que $\beta = 0$.

(iii.i) Encontre a forma explícita da solução $\lambda(x)$ em função apenas da distribuição $F(x)$ e da densidade $f(x)$.

Observação: Pode haver um certo abuso condenável por matemáticos. Não se preocupe.

(iii.ii) Suponha que os valores dos agentes estão uniformemente distribuídos no intervalo $[0,1]$. Apresente a estratégia encontrada e compare-a com a solução do leilão selado de primeiro preço, em que $\lambda(x) = \frac{x}{2}$.

(iv) Calcule explicitamente a receita esperada do leiloeiro nesse caso. Esse resultado era esperado?

(iv) Considere agora o caso particular em que $\beta = 1$.

(iv.i) Encontre a forma explícita da solução $\lambda(x)$ em função apenas da distribuição $F(x)$ e da densidade $f(x)$ para o caso da distribuição uniforme.

(iv.ii) A que situação corresponde essa parametrização?

(v) O que você pode dizer sobre a receita esperada do leiloeiro nas diferentes parametrizações desse leilão? Justifique sua assertiva.

R. Em todos os casos, vemos imediatamente que o jogador de pior tipo, aquele que atribui valor zero ao objeto, escolhe o lance $\lambda(0) = 0$. Portanto, de acordo com o Teorema de Equivalência de Receitas, como a regra de alocação de todos os mecanismos é a mesma, e a regra de pagamento satisfaz essa propriedade de que o agente de pior tipo paga exatamente o mesmo valor nulo, então todos esses leilões geram a mesma receita esperada para o leiloeiro.

Questão 2

Estudamos em classe os leilões selados de primeiro e segundo preço. O objetivo deste exercício é resolver em um único modelo diferentes alternativas para as regras do leilão padrão (em que o objeto fica com quem atribui maior valor a ele).

Considere, portanto, um leilão selado com dois participantes com valores privados, simétricos, independentes, distribuídos no intervalo $[0, \omega]$ segundo a função de distribuição de probabilidades $F(x)$ e densidade $f(x) = F'(x)$.

As regras do leilão são as seguintes:

- (a) Quem fizer o maior lance, recebe o objeto.
- (b) O vencedor paga um valor correspondendo a uma média ponderada entre seu (maior) lance (l_1) e o segundo maior lance (l_2), com peso $\alpha \in [0,1]$ para seu lance e $(1 - \alpha)$ para o segundo maior lance: $\alpha l_1 + (1 - \alpha) l_2$.
- (c) O perdedor paga um percentual $\beta \in [0,1]$ de seu (segundo maior) lance (l_2): βl_2 .

Buscamos um ENB simétrico, estritamente crescente, duas vezes continuamente diferenciável (por essa razão sequer defini acima o que ocorre em caso de empate).

- (i) Apresente a utilidade esperada ínterim do jogador 1 de tipo $x \in [0, \omega]$ quando ele faz um lance l e seu oponente usa a estratégia $\lambda(\cdot)$: $U_1(l; x) = U_1(l, \lambda(\cdot); x, \alpha, \beta)$.

Sugestão: Inicialmente use integrais, depois faça as integrações correspondentes; se necessário, defina por $\Lambda F(\cdot)$ uma primitiva da função $\lambda(\cdot)f(\cdot)$.

- (ii) Calcule a condição de primeira ordem $\frac{d}{dl} U_1(l; x) = 0$. Lembrando que na solução procurada $l = \lambda(x)$ e que $(\lambda^{-1})'(\lambda(x)) = (\lambda'(x))^{-1}$, reescreva a CPO em função de $\lambda(x), \lambda'(x), F(x), f(x), \alpha, \beta$.

- (iii) Considere o caso particular em que $\alpha = 1; \beta = 0$.

(iii.i) Encontre a forma explícita da solução $\lambda(x)$ em função apenas da distribuição $F(x)$ e da densidade $f(x)$.

(iii.ii) A que situação corresponde essa parametrização?

- (iv) Considere agora o caso particular em que $\alpha = \beta = 0$.

(iv.i) Encontre a forma explícita da solução $\lambda(x)$ em função apenas da distribuição $F(x)$ e da densidade $f(x)$. Se achar necessário, suponha que $f(x) \neq 0, \forall x \in [0, \omega]$.

(iv.ii) A que situação corresponde essa parametrização?

- (v) Considere agora o caso particular em que $\alpha = \beta = 1$.

(v.i) Encontre a forma explícita da solução $\lambda(x)$ em função apenas da distribuição $F(x)$ e da densidade $f(x)$.

(v.ii) A que situação corresponde essa parametrização?

- (vi) Considere agora o caso particular em que $\alpha = 0, \beta = 1$.

(vi.i) Encontre a forma explícita da solução $\lambda(x)$ em função apenas da distribuição $F(x)$ e da densidade $f(x)$. (Válida para $x < \omega$.)

(vi.ii) A que situação corresponde essa parametrização? Essa situação se parece com algum jogo estudado antes de iniciarmos a teoria dos leilões?

(vii) Finalmente, considere o caso geral com $\alpha - \beta \neq 0$.

Encontre a forma explícita da solução $\lambda(x)$ em função apenas da distribuição $F(x)$ e da densidade $f(x)$.

Sugestão: Toda a dificuldade deste caso mais geral reside na resolução da equação diferencial, como fizemos na lista 5. Para resolvê-la, pense em multiplicar a equação diferencial por uma função do tipo $[\beta + (\alpha - \beta)F(x)]^\gamma$ em que γ deve ser escolhido adequadamente, de forma a se explicitar a derivada de um produto de duas funções.

(viii) O que você pode dizer sobre a receita esperada do leiloeiro nas diferentes parametrizações desse leilão? Justifique sua assertiva.

(ix) EXTRA. Refaça os itens (i), (ii) e (vii) para o caso mais geral de n jogadores. Trata-se de um procedimento imediato, uma vez entendida a resolução para o caso $n = 2$.