

## TEORIA DOS JOGOS

PROFESSOR MAURÍCIO SOARES BUGARIN ECO/UNB

[mauricio.s.bugarin@gmail.com](mailto:mauricio.s.bugarin@gmail.com) [www.bugarinmauricio.com](http://www.bugarinmauricio.com)

## 5ª Lista de Exercícios – Equilíbrios de Nash em JEII

**Objetivos:** Treinar o uso de diferentes metodologias de busca de equilíbrios em JEII

**Exercício 5.1-** Considere novamente o jogo de Batalha dos Sexos em que cada jogador deriva duas unidades de utilidade quando vai ao lugar que prefere e recebe quatro unidades de utilidade quando encontra o outro jogador no lugar em que vai.

- (i) Encontre todos os equilíbrios de Nash, desse jogo. (É essencialmente repetição do visto em classe).
- (ii) Considere a seguinte alteração desse jogo: o jogador 1 pode ter preferências radicais, em cujo caso, ele deriva três unidades de utilidade quando vai ao lugar que prefere. O jogador 2 sabe que 1 tem preferências radicais com probabilidade  $\frac{1}{4}$ , portanto, tem preferências convencionais com probabilidade  $\frac{3}{4}$ . Encontre todos os equilíbrios de Nash bayesiano desse jogo.
- (iii) Considere agora a seguinte alteração desse jogo: além do jogador 1 poder ter preferências radicais, como em (ii), a jogadora 2 pode não estar assim tão interessada no jogador 1. Nesse caso, ele deriva apenas três, e não mais quatro, unidades de utilidade em estar com ele. O jogador 1 estima que a jogadora 2 está “menos interessada” com probabilidade  $\frac{1}{4}$  sendo, portanto, como em (ii) com probabilidade  $\frac{3}{4}$ . Encontre todos os equilíbrios de Nash bayesiano desse jogo.

**Exercício 5.2-** Considere o jogo do duopólio de Cournot com informação assimétrica descrito em aula, mas suponha agora que também existe informação incompleta sobre o tipo do jogador 1, que também pode ser de dois tipos:  $T_1 = T_2 = \{3, 6\}$ .

- (i) Suponha simetria total no jogo:  $p_i(3) = 1/3, p_i(6) = 2/3, i = 1, 2$ . Equivalentemente:  $p(3,3) = 1/9, p(3,6) = 2/9, p(6,3) = 2/9, p(6,6) = 4/9$ . Encontre o equilíbrio de Nash bayesiano desse jogo e compare com o caso de

informação completa assim como com o caso de informação incompleta analisado no texto;

- (ii) Suponha agora que existe uma assimetria na probabilidade das empresas terem descoberto a tecnologia mais avançada:  $p_1(3) = 1/3, p_1(6) = 2/3; p_2(3) = 2/3, p_2(6) = 1/3$ . A interpretação para essa assimetria é a seguinte. A firma 2 possui uma equipe de pesquisa e desenvolvimento bem mais consolidada e competente que a firma 1, de forma que essa equipe descobre a tecnologia mais avançada com maior probabilidade. Encontre o equilíbrio de Nash bayesiano correspondente e compare com o resultado obtido em (i).

**Exercício 5.3-** Em um país existem exatamente dois partidos, 1 e 2, que têm condições de indicar um candidato para concorrer à presidência. Se indicar um candidato e ele vencer, o partido recebe o payoff 2. Se concorrer sozinho, o partido tem a certeza da vitória. Caso os dois partidos concorram, então cada candidato terá 50% de chances de vitória. Se um partido decidir indicar um candidato, ele terá que pagar o custo da campanha eleitoral que depende de suas características próprias. Cada partido sabe seu exato custo de campanha. No entanto, para o outro partido o custo encontra-se uniformemente distribuído no intervalo  $[1,3]$ .

- (i) Construa o JEII correspondente.
- (ii) Encontre o equilíbrio de Nash bayesiano desse jogo. Existe arrependimento ex-post nesse equilíbrio?

P.S.: É possível modelar o jogo de competição eleitoral quando os dois partidos entram na disputa. Neste exercício abstraímos dessa modelagem, postulando a chance de vitória de 50% para cada, que é o resultado encontrado quando se modela essa disputa.

**Exercício 5.4.** Considere um leilão selado de primeiro preço, no qual dois agentes disputam um bem. Do ponto de vista do leiloeiro, os valores que os agentes atribuem a esse bem são variáveis aleatórias independentes, distribuídas uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ , conforme apresentado em classe.

O equilíbrio de Nash bayesiano simétrico encontrado em classe prevê que cada jogador fará um lance correspondendo à metade de seu verdadeiro valor. Essa

característica do equilíbrio implica um retorno menor para o leiloeiro do que ele poderia obter caso observasse o valor de cada participante. Surge então a seguinte proposta de regra alternativa para o leilão: o objeto continua ficando com quem faz o maior lance, mas o vencedor passa a pagar o quadrado do seu lance:  $l(v)^2$ , e não mais o valor desse lance. Note que, como espera-se que o lance esteja entre 0 e 1, o vencedor pagará MENOS que seu lance:  $l(v)^2 < l(v)$ , de forma que, é possível que o jogador escolha lances maiores.

O objetivo deste exercício é encontrar o equilíbrio desse novo formato de leilão. Denote por  $v_i$  o valor atribuído pelo jogador  $i=1,2$  ao objeto, e denote por  $l_i(v_i)$  a estratégia do jogador  $i$  em um equilíbrio bayesiano do jogo.

- (i) Apresente a utilidade *ex-post* do jogador 1 quando seu valor é  $v_1$ , o valor do jogador 2 é  $v_2$  e os jogadores seguem o perfil de estratégias  $(l_1(.), l_2(.))$ .
- (ii) Suponha que o jogador 2 escolhe uma estratégia  $l_2(.)$ . Apresente a utilidade esperada ínterim do jogador 1 quando seu valor é  $v_1$  e seu lance é  $\lambda_1$ .
- (iii) Qual é o problema de maximização que 1 deve resolver para escolher o valor de  $\lambda_1$  que será uma melhor resposta à estratégia  $l_2(.)$ , dado seu tipo  $v_1$ ?
- (iv) Resolva esse problema supondo simetria na solução  $l_1(v)=l_2(v)=l(v)$ , para todo  $v$  em  $[0,1]$  e supondo que a função de lance  $l(.)$  é estritamente crescente.
- (v) Calcule a receita esperada do leiloeiro e conclua se há ou não vantagem para o leiloeiro em se fazer essa alteração no leilão.